

APORTES

UN RESULTADO EN GEOMETRIA DIFERENCIAL

José Darío Sánchez Hernández
Bogotá -Colombia. junio - 2006
[*danojuanos@hotmail.com*](mailto:danojuanos@hotmail.com)
[*danojuanos@tutopia.com*](mailto:danojuanos@tutopia.com)
[*danojuanos@yahoo.com*](mailto:danojuanos@yahoo.com)

El objeto de este aporte es invitar al cibernauta para que vea los avances de la geometría como una herramienta fundamental de la física matemática, usando las variedades Rimanianas y de Lorentz. Sólo se presenta un resultado fundamental en forma global y referencias donde el cibernauta puede profundizar y tal vez obtener resultados de mucho valor en la investigación.

INTRODUCCION . Una variedad de *Lorentz* (M,g) es una variedad suave M conexa de dimensión finita, equipada con un campo tensorial $(0,2)$ simétrico suave g , tal que para todo $z \in M$, $g(z)[\cdot, \cdot]$ es una forma bilineal no degenerada en el espacio tangente T_zM teniendo *un valor propio no degenerado*.

Las variedades de Lorentz en cuatro dimensiones juegan un papel muy importante en *Relatividad General* y constituye la llamada teoría del espacio tiempo.

En orden a estudiar la geometría de una variedad de Lorentz, las geodésicas juegan un papel muy importante. Recordemos que una geodésica es una curva suave $\gamma : [a,b] \rightarrow M$ tal que $\nabla_s \dot{\gamma} = 0$ donde $\dot{\gamma}$ es el vector tangente de γ y ∇_s es la derivada de Levi-Civita a lo largo de γ (recuerden lo que es la *derivada covariante*).

En las investigaciones recientes es bien conocido que si γ es una geodésica, existe una constante E_γ tal que $E_\gamma = g(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)]$ para todo $s \in [a,b]$.

Entonces γ se dice

semejante al tiempo si $E_\gamma < 0$;

semejante a la luz si $E_\gamma = 0$;

semejante al espacio si $E_\gamma > 0$.

Esta clasificación es llamada carácter *CAUSAL* de las geodésicas. Las geodésicas semejantes al tiempo tienen una importancia física significativa, puesto que ellas representan al *MUNDO LINEAL*. Las geodésicas semejantes a la luz representan a los *RAYOS DE LUZ* , mientras que las geodésicas semejantes al espacio no tienen interpretación física por que al trabajar en ellas, una partícula podría ser más rápida que la luz. Sin embargo, las geodésicas semejantes a luz son útiles en el estudio de la geometría de una variedad de Lorentz.

OBTENCION DE UN RESULTADO.

Se estudia la existencia de las geodésicas cerradas, es decir, geodésicas $\gamma : [a,b] \rightarrow M$ tales que

$$\gamma(a) = \gamma(b) \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$$

Para nuestro conocimiento, los resultados previos sobre existencia de geodésicas cerradas están contenidos en varios artículos de investigadores muy conocidos como G. J. Galloway, F.J. Tipler, B.O'Neil, quienes han probado que bajo propiedades topológicas adecuadas de las variedades, existen geodésicas cerradas semejantes al tiempo. Sin embargo las variedades de Lorentz compactas no tienen interés físico porque ellas violan la condición de cronología, es decir, ellas siempre tienen curvas semejantes al tiempo.

DEFINICION. Sea $M = M_0 \times \mathbb{R}$ una C^3 -variedad conexa . Una métrica de Lorentz $g(z) = g(x, t)$ en M se dice ESTACIONARIA si

$$\forall x \in M_0, \forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall \xi, \xi' \in T \times M_0, \forall \tau, \tau' \in T_t \mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \equiv T_{t'} \mathbb{R}$$

$$i. g(x, t) \cdot \left[\begin{matrix} \xi \\ \tau \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} \xi' \\ \tau' \end{matrix} \right] = g(x, t) \cdot \left[\begin{matrix} \xi' \\ \tau' \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} \xi \\ \tau \end{matrix} \right]$$

Indicaremos $g(x) = g(x, 0)$

$$ii. g(x) \cdot \left[\begin{matrix} \xi \\ 0 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} \xi \\ 0 \end{matrix} \right] > 0$$

$$iii. g(x) \cdot \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right] < 0$$

La condición (i) indica que g no depende del tiempo, por lo tanto se dice que g es estacionaria . La condición (ii) implica que g es una métrica Riemanniana en M_0 , mientras que las ocurrencias (ii) y (iii) implican que g es una métrica de Lorentz.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica Riemanniana inducida por g en M_0 , en estas condiciones la métrica g toma la forma

$$g(x) \left[\begin{matrix} \xi \\ \tau \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} \xi' \\ \tau' \end{matrix} \right] = \langle \xi, \xi' \rangle + \langle \delta(x), \xi \rangle \tau' + \langle \delta(x), \xi' \rangle \tau - \beta(x) \tau \tau'$$

donde $\beta(x)$ es una función C^3 positiva definida por

$$\beta(x) = -g(x) \cdot \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

y $\delta(x)$ es un campo de vectores C^3 definido por

$$\langle \delta(x), \xi \rangle = g(x) \left[\begin{matrix} \xi \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

La conexión geodésica de una variedad de Lorentz estacionaria, ha sido estudiada cuando M_0 es una variedad compacta, cuando M_0 es completa en la métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y cuando M es una variedad con frontera. La existencia y multiplicidad de trayectorias semejantes al tiempo han sido también ya estudiadas, es decir en la parte espacial solamente geodésicas cerradas podrán ser investigadas. Trataremos en consecuencia con geodésicas cerradas.

En una variedad de Lorentz estacionaria no existen geodésicas cerradas semejantes al tiempo, ni geodésicas cerradas no triviales semejantes a la luz (es decir, no reducidas a un punto). En verdad, sea $\gamma = (x, t)$ una geodésica cerrada, por el teorema de Rolle, existe s_0 tal que $\dot{t}(s_0) = 0$ Así tenemos

$$E_\gamma = \langle \dot{x}(s_0), \dot{x}(s_0) \rangle \geq 0$$

Por lo tanto γ no puede ser semejante a la luz. Más aún si γ es semejante a la luz, $\dot{\gamma}(s_0) = 0$ y por la unicidad del problema de Cauchy para las geodésicas, γ debe ser trivial.

Tenemos lo siguiente como un resultado a ser investigado y el cual constituye el teorema objeto de este aporte.

TEOREMA 1: *Sea (M, g) una variedad de Lorentz estacionaria tal que M_0 es compacta. Entonces M tiene una geodésica cerrada no trivial semejante al espacio.*

NOTA 1. Si M no es estacionaria el teorema no se tiene. En efecto esto se muestra tomando \mathbb{R}^2 con la métrica de Lorentz dada por

$$ds^2 = \cos^2 x dx^2 + 2 \sin x dx dt - \cos^2 x dt^2$$

y sea $M = \mathbb{R}^2/G$, donde G es el grupo de isometrías generado por $(x, t) \rightarrow (x + 2\pi, t + 1)$. Entonces M equipado con la métrica de Lorentz inducida por ds^2 no tiene geodésicas cerradas semejantes al espacio.

El teorema 1. se obtiene por métodos variacionales, teniéndose en cuenta que si $z = (x, t)$ es una geodésica cerrada, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ la curva $z_\tau = (x, t + \tau)$ es una geodésica, más aún puesto que g no depende de t se obtiene un "cilindro" de geodésicas cerradas.

NOTA 2. Si la métrica g es estacionaria, esto es $\delta = 0$, una curva cerrada $z = (x, t)$ es una geodésica si y sólo si t es constante y x es una geodésica para la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El teorema 1. de este aporte extiende el teorema de existencia de una geodésica cerrada no trivial para una variedad Riemanniana compacta. Sin embargo este resultado en el caso Riemanniano puede ser deducido del teorema 1.

Finalizo este aporte mencionando el espacio funcional conocido como el espacio del *MACRO-TRABAJO*.

Sea $I = [0, 1]$, (M, g) una variedad de Lorentz estacionaria en $M = M_0 \times \mathbb{R}$. Por el teorema del encaje de Nash, podemos suponer M_0 como subvariedad de \mathbb{R}^N , $N = \frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la métrica euclidiana. Sea

$$H^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^N) = \left\{ x \in L^2(I, \mathbb{R}^N) / x \text{ es absolutamente continua, } \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds < \infty \text{ y } x(0) = x(1) \right\}$$

Es bien conocido que $H^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert con norma dada por $\|x\|^2 = \int_0^1 [\langle x, x \rangle + \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle] ds$.

Ahora sea

$$\Lambda^1 = \Lambda^1(M_0) = \{x \in H^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^N) / x(s) \in M_0 \forall s \in I\}$$

Λ^1 es una subvariedad de $H^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^N)$ y para cada $x \in \Lambda^1$ el espacio tangente es

$$T_x \Lambda^1 = \{\xi \in H^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^N) / \xi(s) \in T_{x(s)} M_0, \forall s \in I\}$$

Más aún sea $\mathcal{Z} = \Lambda^1 \times H^{1,2}(S^1, \mathbb{R})$. \mathcal{Z} es una variedad y para cada $z = (x, t) \in \mathcal{Z}$, el espacio tangente es

$$T_z \mathcal{Z} = T_x \Lambda^1 \times H^{1,2}(S^1, \mathbb{R})$$

En la variedad \mathcal{Z} se considera la función acción $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(z) [\dot{z}, \dot{z}] ds = \frac{1}{2} \int_0^1 [\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + 2\langle \delta(x), \dot{x} \rangle t - \beta(x) t^2] ds$$

Es fácil ver que f es un funcional de clase C^1 en \mathcal{Z} .

En la demostración del teorema 1. se prueba que cada punto crítico de f es una geodésica cerrada para g .

REFERENCIAS

- [1] Galloway, G.J., *Closed timelike geodesics*. T.A.M.S (1984), 379–388
- [2] Galloway, G.J., *Compact Lorentzian manifolds without closed non-spacelike closed geodesics*, Proc.Amer.Soc.98 (1986), 119–123
- [3] Tipler, F. J., *Existence of closed timelike geodesics in Lorentz spaces*, Proc.Amer.Math.Soc.11(1979), 633–644
- [4] O'Neil, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic press 1983
- [5] Palais, R.S., *Critical point theory and the min-max principle*, in "Glob. Anal, Sym. Pure Math.," pp. 185–202, Amer.Math. Soc., Providence, RI, 1970.
- [6] Pisani, L., *Existence of geodesics for stationary Lorentz manifolds*, *Boll.Un.Mat.Ital.B* (1991), 507–520
- [7] Schwartz, J.T., "Nonlinear Functional Analysis," Gordon & Breach, New York, 1969.

- [8] Vigue–Porrier, M., and Sullivan, D., *The homology theory of geodesic problem*, *J. Differential Geom.* 11 (1979), 633–644.

ДАЖЙЛЛЭЮ

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de la Geometría Diferencial.

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora quien leyó los originales y cuidó del buen manejo del lenguaje español.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

Copyright© Darío Sánchez Hernández