APORTES
UN PROBLEMA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

José Darío Sánchez Hernández
Bogotá -Colombia. Agosto - 2006
danojuanos@hotmail.com
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

Luego de algunos años de profundas reflexiones y enredado en mis labores como docente logré llegar a una solución del problema que me había propuesto y que en una conferencia del primer encuentro de Topología había expuesto. Quiero aprovechar este trabajo de matemáticas virtuales para mostrar la solución a que se llegó, sin descartar posibles errores en la presentación de la maquinaria utilizada en la prueba. El espiritu de este aporte no se separa de la idea fundamental que me he propuesto desde el principio, consistente en presentar problemas con el fin de que el amable cibernauta obtenga ideas que lo lleven a una mejor formación en el campo de la matemática.

1. VARIACIONES SOBRE FUNCIONES PERIÓDICAS.

Iniciamos este aporte recordando algunos resultados que ya habiamos estudiado de variaciones sobre funciones periódicas.
Sea $f:\Re\longrightarrow\Re^N$ una función vectorial 2π-periódica, estas funciones pueden identificarse con aplicaciones del círculo unitario S^1 en $\Re^N$.
Consideremos el espacio funcional

$$C^\infty\left(S^1,\Re^N\right)=\left\{f:S^1\longrightarrow\Re^N; f \text{ es indefinidamente diferenciable}\right\}$$

en este espacio se tienen los siguientes productos internos

$$(f,g)_0=\int_0^{2\pi}\langle f(t),g(t)\rangle dt$$
$$(f,g)_1=(Df,Dg)_0+(f,g)_0=((1-D^2)f,g)_0$$

y las normas dadas por

$$\|f\|_0^2=(f,f),\quad \|f\|_1^2=(f,f)_1,\qquad \|f\|_{-1}=\sup\{(f,g)_0;\|g\|_1=1\}$$

se construyen los siguientes espacios de Sobolev

$$H_1=\|.\|_1\text{-completado de } C^\infty\left(S^1,\Re^N\right)$$
$$H_0=\|.\|_0\text{-completado de } C^\infty\left(S^1,\Re^N\right)$$
$$H_{-1}=\|.\|_{-1}\text{-completado de } C^\infty\left(S^1,\Re^N\right)$$

teniéndose que

$$H_1\subset H_0\subset H_{-1}$$

Además las aplicaciones canónicas

$$i_1:H_1\longrightarrow H_0,\quad \text{y ,}\quad i_0:H_0\longrightarrow H_{-1}$$

son funciones completamente continuas (la demostración de esta última afirmación puede verse en $[9]$ o en $[16]$).

PROPOSICIÓN 1. *El producto interno* $(.)_0:H_1\longrightarrow\Re$ *es representable por un potencial convexo*.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Lax Milgram (lea cuidadosamente los problema 145 y 146 en ecuaciones diferenciales de mi trabajo en matemática virtual [20]), como el producto interno $(,)_0$ es una forma bilineal de H_1 entonces existe un operador completamente continuo $G : H_1 \longrightarrow H_1$ tal que

$$(f,g)_0 = (Gf,g)_1.$$

Sin utilizar el teorema de Lax Milgram, basta recordar el teorema de representación de Riesz: sea $F : H \longrightarrow \Re$ (F podría ser $(,)_0$) una aplicación lineal continua, entonces existe un único $g_0 \in H$ tal que $F(f) = \langle f, g\rangle_0$ para todo $f \in H$; en particular existe $h \in H_1$ tal que $(f,g)_0 = (h,g)_1$ entonces existe $G : H_1 \longrightarrow H_1$ dado por $G(f) = h$. En este caso es frecuente afirmar que se ha construido un operador de Green.
Se tiene entonces que H_{-1} resulta ser un espacio de Hilbert con producto interno dado por

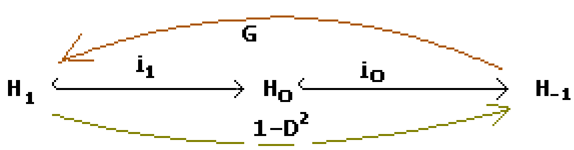
(1) $$(f,g)_{-1} = (Gf,g)_0.$$

También H_{-1} es el dual de H_1 según el producto interno $(,)_0$, esto es si $l : H_1 \longrightarrow \Re$, existe $h_{-1} \in H_{-1}$ tal que

(2) $$l(f) = (h_{-1}, f)_0 = (Gh_{-1}, f)_1.$$

PROPOSICIÓN 2. *El operador* $1 - D^2 : H_1 \longrightarrow H_{-1}$ *es biyectivo*.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 1 el operador de Green G, allí construido por el teorema de extensión de Tietze, puede extenderse de H_{-1} a H_1 y tiene a $1 - D^2$ como inverso



En efecto se tiene para todo $g \in H_1$

$$(f,g)_1 = ((1-D^2)f, g)_0 = (G(1-D^2)f, g)_1$$

de donde se concluye que $G(1-D^2)f = f$ para todo $f \in H_1$.
Por otra parte

$$\begin{aligned}((1-D^2)Gf, g)_{-1} &= (G[(1-D^2)Gf], g)_0 = (G[G(1-D^2)(Gf)], g)_1 \\ &= (G(Gf), g)_1 = (Gf, g)_0 = (f,g)_{-1}\end{aligned}$$

de donde tenemos

$$(1-D^2)Gf = f$$

para todo $f \in H_{-1}$.

Estamos en condiciones de analizar el comportamiento de un potencial convexo para campos periódicos y más exactamente en H_1 se tiene.

DEFINICIÓN 3. *Sea E una función de clase C^1 en H_1. El gradiente de E en f, $\nabla^1 E_f$, es un vector en H_1 definido por*

(3) $$(\nabla^1 E_f, g)_1 = dE_f(g).$$

Tenemos para f fijo que, la aplicación

$$\begin{aligned} dE_f : H &\longrightarrow \Re \\ g &\longmapsto dE_f(g) \end{aligned}$$

es una función lineal continua en H_1, por ser H_{-1} el dual de H_1 se sigue de (2) que existe $h_{-1} = \nabla^0 E(f)$ tal que

$$dE_f(g) = (h_{-1}, g)_0 = (\nabla^0 E(f), g)_0 = (G\nabla^0 E(f), g)_1$$

entonces tenemos que

(4) $$\boxed{\nabla^1 E(f) = G\nabla^0 E(f)}\ .$$

2. CÁLCULO VARIACIONAL EN H_1.

Consideremos en particular en H_1 las siguientes funciones

$$\begin{aligned} E : H_1 &\longrightarrow \Re \\ f &\longmapsto E(f) = \int_0^{2\pi} V(f(t))dt \\ J : H_1 &\longrightarrow \Re \\ f &\longmapsto J(f) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f'(t), f'(t))dt \\ F_i : H_1 &\longrightarrow \Re \\ f &\longmapsto F_i(f) = \int_0^{2\pi} V_i(f(t))dt\ . \end{aligned}$$

(i) Calculemos la primera variación de E en f

$$\begin{aligned} dE(f)(g) &= \left(\tfrac{d}{d\epsilon}\int_0^{2\pi} V(f(t)+\epsilon g(t))dt\right)_0 = \left(\int_0^{2\pi} \tfrac{\partial(V(f(t)+\epsilon g(t)))}{\partial\epsilon}dt\right)_{\epsilon=0} = \\ &= \int_0^{2\pi}\{\nabla^0 V(f(t)+\epsilon g(t))\cdot g(f)\}_{\epsilon=0}dt = \int_0^{2\pi}\nabla^0 V(f(t))\cdot g(t)dt = \\ &= (\nabla^0 V(f(t)), g(t))_0. \end{aligned}$$

Luego

$$(G\nabla^0 E(f), g)_0 = (\nabla^1 E(f), g)_1 = (\nabla^0 V(f), g(t))_0 \text{ para todo } g \in H_1$$

entonces

$$G\nabla^0 E(f) = \nabla^0 V(f)$$

y esto implica que

(5) $$\boxed{\nabla^1 E(f) = \nabla^0 V(f)}\ .$$

(ii) En la misma forma calculemos la primera variación para J

$$\begin{aligned} dJ_f(g) &= \left(\tfrac{d}{d\epsilon}\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f'(t)+\epsilon g'(t))\cdot(f'(t)+\epsilon g'(t))dt\right)_{\epsilon=0} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\tfrac{d}{d\epsilon}(f'(t)\cdot f'(t) + 2\epsilon f'(t)\cdot g'(t) + \epsilon^2 g'(t)\cdot g'(t))dt\right)_{\epsilon=0} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{2f'(t)\cdot g'(t) + 2\epsilon g'(t)\cdot g'(t)\}_{\epsilon=0}dt \\ &= \int_0^{2\pi} f'(t)\cdot g'(t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se tiene

$$dJ_f(g) = f'(t)g(t)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t)g(t)dt = -(D^2 f, g)_0$$

entonces

(6) $$\nabla^0 J(f) = -D^2 f.$$

Ahora $\nabla^1 J(f) = G\nabla^0 J(f)$, además se debe tener por la proposición 2 que

$$G(1-D^2)f = f,$$

o sea $Gf - G(D^2 f) = f$ lo cual es equivalente a $Gf + G\nabla^0 J(f) = f$, entonces

(7) $$\boxed{\nabla^1 J(f) = G\nabla^0 J(f) = f - Gf}.$$

(iii) Igualmente se tiene

$(\nabla^0 F_i(f), x_j)_0 = (V_{ij}, x_j)_0$, entonces $(\nabla^0 F_i(f))_j = V_{ij}(f)$.

En efecto

$$(\nabla^0 F_i(f), x_j)_0 = dF_i(f)(x_j) = \left(\frac{d}{d\epsilon}\int_0^{2\pi} V_i(f(f) + \epsilon x_j)dt\right)_{\epsilon=0} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (V_{ij}(f(t) + \epsilon x_j)\cdot x_j)_{\epsilon=0} dt = \int_0^{2\pi} V_{ij}(f(t))\cdot x_j(t)dt = (V_{ij}(f), x_j)_0.$$

de donde

$$\boxed{(\nabla^0 F_i(f))_j = V_{ij}(f)}.$$

3. ENUNCIADO Y DESARROLLO DEL PROBLEMA

Paul H. Rabinowitz presenta en [13], la existencia de una solución periódica del sistema Hamiltoniano de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dp}{dt} = -H_q, \qquad \frac{dq}{dt} = H_p$$

donde $H \in C^1(\Re^{2N}, \Re)$ y $p, q \in \Re^N$. El resultado principal trabajado por Rabinowitz es el siguiente:

TEOREMA de Rabinowitz. "*Sea* $H \in C^1(\Re^{2N}, \Re)$*, supóngase que*

$(H1)$ *para algún* $b \neq 0$*,* $H^{-1}(b)$ *es radialmente homeomorfo a* S^{2N-1}*,*

$(H2)$ $(\xi, H_z(\xi))_{\Re^{2N}} \neq 0$ *para* $\xi \in H^{-1}(b)$*.*

Entonces el sistema hamiltoniano

$$\frac{dz}{dt} = IH_z$$

posee una solución periódica en $H^{-1}(b)$*", donde* I *es una función matricial adecuada.*

Parece natural plantearse el siguiente problema

(I) ¿Bajo qué condiciones y con qué tipo de funciones, el sistema hamiltoniano de segundo orden $\frac{d^2z}{dt^2} = IH_z$ posee una solución periódica en $H^{-1}(b)$?

Para obtener una respuesta al problema (I), la cual se encuentra probablemante en el espacio de Sobolev H_1 dado por

$$H_1 = \overline{C^\infty(S^1, R^N)}^{\|\|_1}.$$

Cambiamos la notación, consideraremos la función $V : \Re^N \longrightarrow \Re$ de clase C^2 y planteamos el problema en la siguiente forma

(II) ¿Bajo qué condiciones, el sistema hamiltoniano de segundo orden $\frac{d^2z}{dt^2} = -\nabla V(z)$ posee una solución periódica en $H^{-1}(b)$?

El problema (II) que se propone fue estudiado por Lyapounov quien afirmó la existencia de soluciones periódicas, cuando las razones λ_i/λ_j son números enteros, siendo λ_i, λ_j valores propios de la matriz Hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) = (V_{ij}) .$$

Fue F. Clarke en [4] quien dio una respuesta positiva a la pregunta planteada en el problema (II) y para ello hizo uso de la teoría del minimax, la presentamos a continuación con la prueba de la misma, la cual es debida a Lazer–Clarke.

TEOREMA 1. (Clarke). *Sea* $V \in C^2(\Re^n, \Re)$ *y* $(V_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ *su matriz Hessiana, supóngase por otra parte que*

$(C-1)$ $V(-x) = V(x), \quad V(0) = 0$

$(C-2)$ $V(x) \leq c_1\|x\|^2 + c_2$ *donde* $c_1 \leq \frac{1}{2}$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *denotando los valores propios de* $(V_{ij}(0))$*. Para cada* $j = 1, 2, \ldots, n$ *se define un entero* $m_j \geq 0$ *como sigue*

$$m_j = \begin{cases} 0 \quad \textit{si} \quad \lambda_j \leq 1 \\ \textit{el único entero positivo tal que} \\ m_j^2 < \lambda_j < (m_j+1)^2, \textit{ si } 1 > \lambda_j. \end{cases}$$

Bajo estas hipótesis si $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ *entonces el sistema hamiltoniano de segundo orden*

$$D^2 x + \nabla V(x) = 0$$

tiene al menos $2N$ *soluciones no triviales* π*–periódicas impares*.

DEMOSTRACIÓN. Está basada en el teorema 3.4 del aporte topología para un problema de minimax [18] y se trata de ponerse en las hipótesis de ese teorema; para esto sea $H = P_n^0 \equiv$ espacio de funciones π–periódicas definidas en $\Re$ con valores en $\Re^n$, tales que si $v \in P_n^0$ implica que v es absolutamente continua y $\int_{-\pi}^{\pi} \|v'\|^2 dt < \infty$. El producto interno en H está dado por

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (u', v') dt.$$

Consideremos la función

$$f : H \longrightarrow \Re$$
$$x \longmapsto f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))\right) dt$$

La condición $(C-1)$ implica $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in P_n^0$ y $f(0) = 0$.
Un argumento natural prueba que $f \in C^2$ y que el gradiente ∇f está definido implícitamente por

$$\langle \nabla f(x), v \rangle_1 = \int_{-\pi}^{\pi} [(x', v') - (\nabla V(x), v)] dt = \langle x, v \rangle_1 - \langle F(x), v \rangle_0$$

donde F está definido implicitamente por

$$\langle F(x), v\rangle_0 = \int_{-\pi}^{\pi} (\nabla V x(t), v(t))dt.$$

Puesto que una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, la cual converge débilmente en P_n^0, converge uniformemente en $(-\infty, \infty)$, entonces F es débilmente continua. De la condición $(C-2)$ de V tenemos

$$f(x) \geq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\tfrac{1}{2}\|x'\|^2 - C_1\|x\|^2 - C_2\Big)dt \geq \big(\tfrac{1}{2} - C_1\big)\int_{-\pi}^{\pi} \|x'(t)\|^2 dt - 2\pi C_2$$

donde hemos usado la desigualdad de Wirtinger dada por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|x(t)\|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|x'(t)\|dt, \qquad \text{para todo} \qquad x \in P_n^0 = H.$$

Puesto que $C_1 < \frac{1}{2}$, entonces $f(x) \to \infty$ cuando

$$\|x\|_1 = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \|x'(t)\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \to \infty.$$

Para verificar que la condición restante del teorema 3.4, del aporte topología del minimax [18] se cumple, podemos suponer que $N > 0$, pues de otra forma la afirmación es trivial. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, vectores de $\Re^n$ tales que $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ y además que $(V_{ij}(0))\xi_j = \lambda_j \xi_j$. Esto es debido al teorema espectral para dimensión finita y gracias a que $(V_{ij}(0))$ es simétrica.

Sea M el subespacio de P_n^0 generado por todas las funciones $y(t)$ de la forma $y(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\xi_j$ donde

$$f_j(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \sin kt & \text{si } \lambda_j > 1 \\ 0 & \text{si } \lambda_j \leq 1 \end{cases}$$

siendo c_{jk}, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m_j$ números reales. Un fácil ejercicio demuestra que $\dim M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = N$. Un argumento natural prueba que $D^2 f$ está definido implícitamente por

$$\langle D^2 f(x)u, v\rangle_1 = \int_{-\pi}^{\pi} [(u', v') - ((V_{ij}(x(t)))u(t), v(t))]dt$$

Ahora

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(t)\xi_j, \text{ así, } (y'(t), y'(t)) = \sum_{j=1}^{n} \big(f_j'(t)\big)^2$$

$$(V_{ij}(0))y(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)(V_{ij}(0))\xi_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\lambda_j \xi_j$$

así

$$((V_{ij}(0))y(t), y(t)) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (f_j(t))^2$$

y

$$\langle D^2 f(0)y, y\rangle_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\big(f_j'(t)\big)^2 - \lambda_j (f_j(t))^2\Big]dt$$

Si $f_j(t) \not\equiv 0$ entonces $m_j^2 < \lambda_j \leq (m_j + 1)^2$, así por la identidad de Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\big(f_j'(t)\big)^2 - \lambda_j (f_j(t))^2\Big]dt = \sum_{k=1}^{m_j} (k^2 - \lambda_j)c_{jk}^2 < 0$$

puesto que $f_j(t) \not\equiv 0$ entonces $\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}^2 \neq 0$.

Así $\langle D^2 f(0)y, y\rangle_1 < 0$ a menos que $f_j(t) \equiv 0$ para todo j, $1 \le j \le n$ lo cual implica que $y(t) \equiv 0$. De este modo todas las hipótesis de teorema 3.4 de topología del minimax [18] se verifican; así existen al menos $2N$ soluciones no nulas de $\nabla f(x) = 0$.

Si $\nabla f(x) = 0$, entonces

$$\langle \nabla f(x), v\rangle_1 = \int_{-\pi}^{\pi}((x', v') - (\nabla V(x(t)), v))dt = 0$$

para todo $v \in P_n^0$, se prueba que $x \in C^2$, y además que

$$D^2 x(t) + \nabla V(x(t)) = 0.$$

Esto completa la demostración.

□

La identidad de $\langle \nabla f(x), v\rangle_1$ nos dice que x es realmente una solución débil, pues integrandola por partes, se tiene que

$$(x', v)\,]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(x'', v)dt - \int_{-\pi}^{\pi}(\nabla V(x(t)), v)dt = 0$$

como $v \in P_n^0$ entonces $(x', v)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, luego de aquí tenemos

$$\langle D^2 x(t), v\rangle + \langle \nabla V(x(t)), v\rangle = 0 \quad \text{para todo } v \in P_n^0$$

luego

$$\langle D^2 x + \nabla V(v), v\rangle = 0 \ \text{ para todo } v \in P_n^0.$$

Sin embargo el problema (**II**) sigue **abierto** si deseamos soluciones clásicas, por esta razón y con la idea de probar el teorema 1 de Clarke, para soluciones clásicas, siguiendo una sugerencia de Philip Hartman en [8], usamos análisis variacional y **recortando** al máximo las hipótesis del teorema 1, se obtiene una solución al probar el siguiente resultado.

TEOREMA 2. *Sea $V : \Re^n \longrightarrow \Re$ una función estrictamente convexa en una vecindad $\mathfrak{A}$ de cero, de clase C^2 y, si $\nabla V(0) = 0$ entonces existe una solución periódica no trivial para el problema*

$$D^2 f + \nabla V(f) = 0$$

que está contenida en la vecindad $\mathfrak{A}$ de cero.

DEMOSTRACIÓN. Como ya lo hemos probado, (en el aporte de existencia de soluciones periódicas para un problema Hamiltoniano [19] que está en el ciberespacio), los valores propios de $(V_{ij}(x))$ son todos positivos. De la condición $(H1)$ del teorema de Rabinowitz debemos construir una variedad, imagen recíproca de un valor regular de algún funcional. Tomemos H_1 el espacio de Sobolev construido en el aporte existencia de soluciones periódicas para un problema Hamiltoniano [19], junto con las funciones E, J y F_i dadas en el numeral 2.

Sea ahora

$$M = \{f \in H_1; Im(f) \subset \mathfrak{A} \text{ y } F_i(f) = 0 \ \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N\}$$

para algún $c > 0$, consideremos la subvariedad

$$M_c = J^{-1}(c) \cap M = \{f \in H_1; Im(f) \subset \mathfrak{A}, F_i(f) = 0 \text{ y } J(f) = c\}$$

teniéndose que si $f \in M_c$ entonces $\|Df\|_0^2 = 2c$, pues

$$\|Df\|_0^2 = \int_0^{2\pi} \|Df\|^2 dt = 2\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \|Df\|^2 dt = 2J(f) = 2c.$$

Además

$$F_i(f) = \int_0^{2\pi} V_i(f(t))dt = \left(\frac{d}{d\epsilon}\int_0^{2\pi} V(f(t)+\epsilon x_i)dt\right)_{\epsilon=0} = dE_f(x_i)$$

de aquí $F_i(f) = 0$ implica que $dE_f(x_i) = 0$, podemos así concluir que

$$(\nabla^0 V(f), x_i)_0 = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, N.$$

En consecuencia se tiene

$$(\nabla^0 V(f), a)_0 = 0 \text{ para todo } a \in H_1$$

En el numeral 2 hemos mostrado que $\nabla^1 E(f) = \nabla^0 V(f)$, de donde se sigue que

$$(a, \nabla^1 E(f))_0 = 0 \text{ para todo } a \in H_1$$

En esta forma M_c toma otra presentación dada por

$M_c = \{f \in H_1;\ \|Df\|_0^2 = 2c,\ f$ es $(\,,)_0$ – ortogonal al subespacio de funciones constantes e $Im(f) \subset \mathfrak{A}\}$

Se puede ahora observar que los elementos de M_c tienen longitud finita (este hecho no depende sino de que $J(f) = c$). Nótese además que cómo una consecuencia de esta última relación todo elemento de M_c tiene longitud de arco $\leq \sqrt{4\pi c}$; en efecto.

Longitud de arco de $f = |(1, f')| \leq \|1\|_0 \|f'\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\sqrt{2c} = \sqrt{4\pi c}$

AFIRMACIÓN 1. *M_c no es vacío, para c suficientemente pequeño.*

Para ver esto, consideremos un encajamiento del círculo unitario en $\mathfrak{A}$ con velocidad uniforme $a \in \Re^n$. Sea $x(t)$ un sistema de coordenadas del círculo unitario, esto es $\|x'(t)\|^2 = 1$, el encajamiento está dado por

$$f_a(t) = \sqrt{2c/\pi}\, x(t) + a$$

entonces

$$J(f_a) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \|f_a'(t)\|^2 dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tfrac{2c}{2\pi}\|x'(t)\|^2 dt = \tfrac{2c}{2\pi}2\pi = 2c.$$

Tomando $\Phi(a) = \int_0^{2\pi} V(f_a(t))dt$, entonces Φ es una función continua en un conjunto compacto, acotado por un potencial constante $V(x) \leq k$ donde k es una constante que depende de c, de manera que

$$\{x;\ V(x) \leq k\} \subset \mathfrak{A}$$

entonces Φ tiene un mínimo en $\overline{a}$ y por lo tanto

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}\right)_{\overline{a}} = 0, \text{ entonces, } \quad F_i(f_{\overline{a}}) = 0$$

así $f_a \in M_c$ y $M_c \neq$ ø.

AFIRMACIÓN 2. *Las funciones $J, F_1, F_2, \ldots, F_N$ dadas en el numeral 2 son linealmente independientes según $f \in M_c$, en el sentido de que $\nabla^1 J, \nabla^1 F_1, \ldots, \nabla^1 F_N$ sean linealmente independientes, así que M_c es una subvariedad suave pero no necesariamente cerrada.*

En efecto, supongamos que existan constantes $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ tales que

$$(1) \qquad \mu_0 \nabla^1 J(f) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^1 F_i(f) = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in M_c.$$

Pero hemos visto en la fórmula (7) del numeral 2 que $\nabla^1 = G\nabla^0$, así tenemos

$$(2) \qquad \mu G \nabla^0 J(f) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i G \nabla^0 F_i(f) = 0.$$

Como G es una biyección se sigue que

$$(3) \qquad \mu_0 \nabla^0 J(f) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^0 F_i(f) = 0$$

pero se tiene que

$$\nabla^0 F_i(f(t)) = (V_{i1} f(t), V_{i2} f(t), \ldots, V_{iN}(f))$$

y si además denotamos con $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$ y tomando el producto interno de (3) con μ tenemos

$$\mu_0 \langle \nabla^0 J(f), \mu \rangle + \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i \mu_j V_{ij}(f) = 0.$$

Ahora como se mostró en (ii) del numeral 2 se sabe que $\nabla^0 J(f) = -D^2 f$ así se tiene

$$\mu_0 \langle \nabla^0 J(f), \mu \rangle = -\mu_0 \langle D^2 f, \mu \rangle = \mu_0 \langle Df, D\mu \rangle = 0.$$

Así que

$$-\mu_0 \langle \nabla^0 J(f), \mu \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i \mu_j V_{ij}(f) = 0.$$

Integrando con t, tenemos

$$-\mu_0 \int_0^{2\pi} \langle \nabla^0 J(f), \mu \rangle dt = \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i \mu_j V_{ij}(f(t)) dt = 0$$

y como V es convexa se sigue que $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_N = 0$, de donde se tiene la afirmación 2, ya que $\nabla^1 J(f) \neq 0$.

En forma completamente análoga a la afirmación 2, $E, F_1, \ldots, F_N$ son funciones linealmente independientes para toda $f \in M_c$ en el sentido de que $\nabla^1 E, \nabla^1 F_2, \ldots, \nabla^1 F_N$ son linealmente independientes, pues

$$\mu_0 \nabla^1 E(f) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^1 F_i(f) = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in M_C$$

siguiendo el mismo procedimiento anterior se llega a que como

$$(\nabla^0 E(f), \mu)_0 = dE_f \mu \quad \text{para todo } f \in M_c$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i \mu_j V_{ij}(f(t)) dt = 0$$

y por la convexidad de V podemos concluir que $\mu = 0$.

De todo lo anterior se sigue que la parte perpendicular de $\nabla^1 E(f)$ a la variedad M_c (para toda $f \in M_c$) es de la forma $\mu_0 \nabla^1 J(f)$. Así si $\widetilde{\nabla}\, E(f)$ denota el gradiente de E en M_c es decir la proyección de $\nabla^1 E(f)$ sobre el espacio tangente de M_c en f, se debe tener entonces que

(4) $$pr_{_{TM_c}}(\nabla^1 E(f)) = \widetilde{\nabla}\, E(f) = \nabla^1 E(f) - \mu_0 \nabla^1 J(f).$$

Como consecuencia de la relación (4), lo que se debe buscar es algún $f \in M_c$ tal que $\widetilde{\nabla}\, E(f) = 0$, o sea un punto crítico de E sobre la variedad M_c.

Nótese que si E es de clase C^2 y $D^2 E$ es su matriz Hessiana, en estas condiciones se sabe que existe $k > 0$ tal que para todo $f \in M_c$ y para todo $g \in M_c$ se tiene solución a la desigualdad variacional, ver [17]

$$\langle D^2 E(f) g, g\rangle \geq k \|g\|^2$$

así existe un único $f_0 \in M_c$ tal que $\widetilde{\nabla}\, E(f_0) = 0.$.

AFIRMACIÓN 3. *$\widetilde{\nabla}\, E(f)$ es $(,)_1$–ortogonal a $\nabla^1 J(f)$ y también a $\nabla^1 F_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, esto es*

$$\left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^1 J(f)\right)_1 = 0, \qquad \left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^1 F_i(f)\right)_1 = 0.$$

En efecto

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^1 J(f)\right)_1 &= \left(\widetilde{\nabla}\, E(f), G\nabla^0 J(f)\right)_1 = \left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^0 J(f)\right)_0 \\ &= -\left(\widetilde{\nabla}\, E(f), D^2 f\right)_0 = -(\nabla^1 E(f), 2c) = -dE_f(2c) = 0\end{aligned}$$

esto dado que $f \in M_c$ y $2c$ es constante. Ahora

$$\left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^1 F_i(f)\right)_1 = \left(\widetilde{\nabla}\, E(f), G\nabla^0 F_i(f)\right)_1 = \left(\widetilde{\nabla}\, E(f), \nabla^0 F_i(f)\right)_0 = 0$$

también aquí es fundamental que $f \in M_c$.

Sea ahora $f_\tau = f\tau$ la solución del sistema

$(E - H)$ $$\begin{cases} \frac{df_\tau}{d\tau} = \widetilde{\nabla}\, E(f_\tau) \\ f_0 = f_* \end{cases}$$

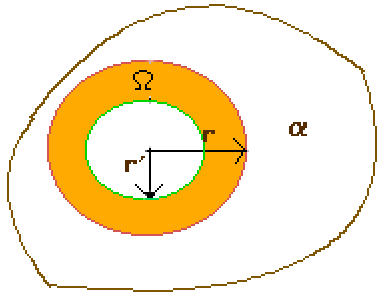
donde f_* es algún ciclo en H_1 sobre el cual se impondrá una condición más fuerte después, por el teorema de Rabinowitz sabemos que la solución existe. Por principio general f_τ está definida en alguna vecindad $\mathfrak{A}$ de f_0. Sea w_+ el tiempo de escape positivo, es decir, el más grande número w tal que la solución existe en el intervalo $[0, w)$.

AFIRMACIÓN 4. *Existe una bola B de $\mathfrak{A}$ tal que si $f_* \in B$ también se tiene que $f_\tau \in B$ para $0 < \tau < w_+$.*

En efecto se sigue de (4) que $\widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)$ es tal que

$$\left\|\widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)\right\|_1 \leq \|\nabla^1 E(f_\tau)\|$$

esto debido a que $\widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)$ es la proyección ortogonal de $\nabla^1 E(f_\tau)$ sobre el espacio tangente a M_c en f_τ, así $\left\|\widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)\right\|_1$ es acotado, solo nos basta demostrar que f_τ está acotada por la $(,)_0$–norma, para eso consideremos la corona contenida en la vecindad de cero $\mathfrak{A}$ y centrada en cero, siguiente:



$$\Omega = \{x \in \mathfrak{A}\,;\, r' \leq \|x\|_0 \leq r\}.$$

Por otro lado como V es estrictamente convexa, para todo $a \in \mathfrak{A} - \{0\}$ se tiene $(a, \nabla V(a)) > 0$, por continuidad de ∇V se tiene que si se da $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|x - a\|_0 < \delta, \quad \text{entonces} \quad \|\nabla V(x) - \nabla V(a)\|_0 < \epsilon.$$

Entonces para $\|x - a\|_0 < \delta$, se tiene $\|(a, \nabla V(x)) - (a, \nabla V(a))\| < \|a\|_0 \epsilon$, así

$$|(a, \nabla V(a))| - \|a\|_0 \epsilon < |(a, \nabla V(x))|$$

y para un $\epsilon > 0$ conveniente se puede conseguir una bola alrededor de a tal que $(a, \nabla V(x)) > 0$.

Ahora por el lema de Lebesgue y la compacidad de Ω, se puede escoger un recubrimiento de Ω y un $d > 0$ tal que la bola de diámetro menor que d, esté contenida en un elemento del recubrimiento. Así se puede escoger c tal que $\sqrt{4\pi c} < d$, entonces para todo $f \in M_c$ se tiene que $f \notin \Omega$. De esta manera se toma f_* en el interior de

$$B_{r'} = \{x \in \mathfrak{A}\,;\, \|x\|_0 < r'\}$$

entonces f_τ está acotado por la $(,)_0$–norma para todo τ.

De la continuidad de ∇V en el dominio Ω, entonces resulta que $\nabla^0 E(f_\tau)$ es acotado en la $(,)_0$–norma, de donde se sigue que $\left\| \widetilde{\nabla}\, E(f_\tau) \right\|$es acotada, se concluye que $w^+ = +\infty$.

AFIRMACIÓN 5. $E(f_\tau)$ *está acotada superiormente*

En efecto, sabemos que

$$\|f_\tau\|_1^2 = \|Df_\tau\|_0^2 + \|f_\tau\|_0^2 = 2c + \|f_\tau\|_0^2$$

de donde se obtiene la acotación de f_τ en el espacio H_1.

Ahora a lo largo de una trayectoria de la ecuación $(E - H)$ se tiene

$$\left(\tfrac{dE(f_\tau)}{d\tau}, \tfrac{df_\tau}{d\tau}\right)_1 = \left(\widetilde{\nabla}\, E(f_\tau), \tfrac{df_\tau}{d\tau}\right)_1 = \left\| \widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)\right\|_1^2$$

por lo tanto $\left\| \widetilde{\nabla}\, E(f_\tau)\right\|_1^2$ está acotada en proximidades de cero y por consiguiente $\|E(f_\tau)\|_1$ está acotado.

Como $\|E(f_\tau)\|_1$ está acotado, podemos extraer una sucesión f_{τ_m} la cual converge débilmente en H_1 hacia f (esto se debe a que el espacio de Sobolev H_1 es reflexivo y en ellos toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, ver teorema III.27 de [16]).

Como $E : H_1 \longrightarrow \Re$ es una función continua y convexa, entonces E es débilmente semicontinua inferiormente y como $f_{\tau m} \rightharpoonup f$ (débil) en H_1 entonces $E(f) \leq \liminf E(f_{\tau_m})$ entonces la desigualdad variacional

$$f \in M_c \;:\; \left(\widetilde{\nabla}\, E(f_{\tau_m}), f_{\tau_m} - f\right) \geq 0 \text{ para todo } f_{\tau_m} \in M_c$$

tiene solución (ver [17]), se sigue

$$E(f) \;=\; \min_{f_{\tau_m} \in M_c} E(f_{\tau_m})$$

por lo tanto $\widetilde{\nabla}\, E(f) = 0$ y se tiene $\widetilde{\nabla}\, E(f_{\tau_m})$ converge fuertemente a 0 en H_1. Por abuso de notación escribimos $f_m = f_{\tau_m}$ y usando la condición (P–S) dada en [18] podemos concluir que $\{f_m\}$ tiene una subsucesión convergente a f, puesto que $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\nabla}\, E(f_m) = 0,$ pues $f_m \rightharpoonup f$ en H_1, de donde se deduce que

$$(5) \qquad \left\| \widetilde{\nabla}\, E(f_m) - \widetilde{\nabla}\, E(f) \right\|_{H_1} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

esto es debido a que $\widetilde{\nabla}\, E$ es débilmente continua y concluimos así que f es el punto crítico buscado de E.

Ahora como la convergencia débil de H_1 implica la $(,)_0$–convergencia, se tiene

$$(6) \qquad E(f_m) \to E(f)\ ; \qquad F_i(f) = \lim_{m\to\infty} F_i(f_m) = 0$$

se tiene además

$$(7) \qquad \|(\nabla^1 E(f_m) = G\nabla^0 E(f_m)) - \nabla^1 E(f)\|_{H_1} \to 0, \text{ cuando } m \to \infty$$

o sea que también $\nabla^1 E(f)$ es débilmente continua (ver aporte sobre topología de minimax [18]). También $\nabla^1 F_i$ es débilmente continua así

$$(8) \qquad \|\nabla^1 F_i(f_m) - \nabla^1 F_i(f)\|_{H_1} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

además

$$(9) \qquad \nabla^1 J(f_m) = f_m - Gf_m \rightharpoonup f - Gf = \nabla^1 J(f) \quad \text{en } H_1.$$

Nótese que como una consecuencia de (6) $f \neq 0$, pues $E(f_m)$ es monótona.

Por otro lado, puesto que $F_i(f) = 0 = \int_0^{2\pi} V_i(f(t))dt$, entonces f no puede ser constante.

Mostraremos más adelante que f_m converge fuertemente en H_1 para f (ver afirmación 8), bajo la hipótesis de que $f \in M_{c_1}$ para $c_1 < c$.

Escribamos $\mu_i = \mu_i(f)$ para indicar la dependencia de las constantes de f, en la ecuación de Euler–Lagrange, o sea en la ecuación

$$(10) \qquad \widetilde{\nabla}\, E(f) = \nabla^1 E(f) - \mu_0 \nabla^1 J(f) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^1 F_i(f)$$

AFIRMACIÓN 6. *La sucesión* $\mu_i(f_m)$ *es acotada para cada* i *cuando* m *tiende a* $+\infty$*.*

En efecto, como $\left(\widetilde{\nabla} E(f_m), \nabla^1 F_i(f_m)\right)_1 = 0$ para todo m, denotando $F_0 = J$ y tomando producto interno de (10) con $\nabla^1 F_j(f_m)$ obtenemos

$$\sum_{i=0}^{N} \mu_i(f_m)(\nabla^1 F_i(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1 = (\nabla^1 E\,(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1 \tag{11}$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$. Utilizando notación matricial la ecuación (11) toma la siguiente forma

$$[(\nabla^1 F_i(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1]_{0 \le i,j \le N} \begin{bmatrix} \mu_0(f_m) \\ \mu_1(f_m) \\ \vdots \\ \mu_N(f_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_0(f_m))_1 \\ (\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_1(f_m))_1 \\ \vdots \\ (\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_N(f_m))_1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien $\nabla^1 E(f_m)$ es acotada en norma de la medida de Lebesgue en $\Re^{N+1}$ del cubo cuya diagonal es

$$((\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_0(f_m))_1, (\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_1(f_m))_1, \ldots, (\nabla^1 E(f_m), \nabla^1 F_N(f_m))_1)$$

mediante una constante apropiada K. Si $\mathfrak{U}$ es el cubo cuya diagonal es

$$(\mu_0(f_m), \mu_1(f_m), \ldots, \mu_N(f_m))$$

y $\nu(\mathfrak{U})$ indica la medida del cubo $\mathfrak{U}$, se tiene que si $\delta > 0$ es dado, entonces si, $det(A_m) > \delta > 0$ para toda m, se tiene

$$det(A_m)\nu(\mathfrak{U}) < K,$$

donde

$$A_m = [(\nabla^1 F_i(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1\,]_{0 \le i,j \le N}$$

por lo tanto

$$\nu(\mathfrak{U}) < \tfrac{K}{\delta}$$

lo cual implica que $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ son funciones acotadas, con lo cual se demuestra la afirmación 6, solamente nos resta mostrar que $det(A_m)\nu(\mathfrak{U}) < K$, para lo cual usamos la siguiente notación

$$detA_m = det_0(f_m) = det[(\nabla^1 F_i(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1]_{0 \le i,j \le N}$$
$$det_1(f_m) = det[(\nabla^1 F_i(f_m), \nabla^1 F_j(f_m))_1]_{1 \le i,j \le N}.$$

AFIRMACIÓN 7. $det_0(f_m)$ *es acotado lejos de cero.*

En efecto de (8) se sigue que $det_1(f_m) \to det_1(f)$ y de (9) $\nabla^1 J(f_m) \rightharpoonup \nabla^1 J(f)$ en H_1, deducimos de aquí que $\|\nabla^1 J(f_m)\|_1$ es acotada. Por esta razón $det_0(f_m) - det_0(f) = \left(\|\nabla^1 J(f_m)\|_1^2 - \|\nabla^1 J(f)\|_1^2\right) det_1(f) + \epsilon(m)$ donde $\epsilon(m) \to 0$

Ahora es un hecho conocido que para cualquier conjunto de vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$, $det[v_i \cdot v_j] > 0$ y como lo hemos visto en la afirmación 2, $J, F_1, \ldots, F_N$ son linealmente independientes, así que para $f \in M_c$, entonces

$det_0(f) > 0$ y $det_1(f) > 0$

Como lo hemos mostrado en el numeral 2, $\nabla^1 J(f) = f - Gf$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\|\nabla^1 J(f_m)\|_1^2 &= \|f_m - Gf_m\|_1^2 = (f_m, f_m)_1 - 2(f_m, Gf_m)_1 + (Gf_m, Gf_m)_1 \\ &= \|f_m\|_1^2 - 2(f_m, f_m)_0 + (Gf_m, f_m)_0 \\ &= \|Df_m\|_0^2 + \|f_m\|_0^2 - 2\|f_m\|_0^2 + \|f_m\|_{-1}^2\end{aligned}$$

y como la convergencia débil en H_1 implica la convergencia fuerte en H_0 y H_{-1} (esto debido a que las inclusiones son completamente continuas). Considerando que $f \in M_{c_1}$ para algún $c_1 < c$

$$\det_0(f_m) = \det_0(f) + 2(c - c_1) + \epsilon(m)$$

así que $\det_0(f_m)$ es acotada fuera de cero (lo cual implica la acotación de $\det_0(f)$ fuera de cero) y así podemos conseguir una subsucesión tal que

$$\mu_i(f_m) \to \mu_i(f), \qquad i = 0, 2, \dots, N.$$

De (10) y (5) tenemos

$$\left\| \nabla^1 E(f_m) - \mu_0(f_m)\nabla^1 J(f_m) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i(f_m)\nabla^1 F_i(f_m) \right\|_{H_1} \to 0$$

cuando $m \to 0$, puesto que $\mu_i(f_m)$ es una sucesión acotada, por paso a una subsucesión podemos suponer que converge, esto es, $\mu_i(f_m) \to \mu_i(f)$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$, así de (8) y (9) obtenemos

$$(13) \qquad \nabla^1 E(f) = \mu_0 \nabla^1 J(f) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^1 F_i(f)$$

de aquí haciendo $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ y tomando producto interno de (13) con μ se obtiene

$$(\nabla^1 E(f), \mu)_1 = (\mu_0 \nabla^1 J(f), \mu)_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \nabla^1 F_i(f), \mu \right)_1$$

usando el mismo razonamiento de la afirmación 2 se obtiene que

$$0 = -\mu_0 (D^2 f, \mu)_0 + \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i \mu_j V_{ij}(f(t)) dt$$

de la convexidad de V se sigue que $\mu = 0$. Hemos así establecido que

$$(14) \qquad \nabla^1 E(f) = \mu_0 \nabla^1 J(f)$$

o la relación equivalente, usando los hechos de que $\nabla^1 E(f) = \nabla^0 V(f)$ y que $\nabla^0 J(f) = -D^2 f$, se tiene que

$$(15) \qquad \mu_0 D^2 f + \nabla V(f(t)) = 0$$

$\mu_0 \neq 0$, puesto que de lo contrario se tendría que $f \equiv 0$.

Para completar la demostración del teorema 2 tenemos que demostrar que $\mu_0 > 0$, para poder hacer el cambio de variable $g(t) = f(\lambda t)$ donde $\lambda^2 = \mu_0$, lo cual implica que g es la solución deseada del sistema

$$D^2 g(t) + \nabla V(g(t)) = 0.$$

Para probar que $\mu_0 > 0$, tomamos producto escalar de (15) con f, obteniéndose

$$0 = \mu_0 (D^2 f, f)_0 + (\nabla V(f), f)_0 = -\mu_0 \|Df\|_0^2 + \int_0^{2\pi} \langle \nabla V(f(t)), f(t) \rangle dt$$

de la convexidad de V el segundo término es positivo, en efecto por convexidad

$$(\nabla V(f(t)), f(t))_0 > 0$$

entonces

$$(\nabla V(f), f)_0 > 0$$

como $\|f\|_1^2 = \|f\|_0^2 - (D^2 f, f)_0$, entonces tenemos

$$(D^2 f, f)_0 = -\left(\|f\|_1^2 - \|f\|_0^2\right) = -\|Df\|_0^2$$

así

$$-\mu_0\|Df\|_0^2 + (\nabla V f, f)_0 = 0$$

como $\|Df\|_0^2 > 0$ y $(\nabla D(f), f)_0 > 0$ se sigue inmediatamente que

$$\mu_0 > 0.$$

La demostración del teorema 2, es por lo tanto completa, pero finalicemos con la siguiente afirmación, que se utilizó en la demostración:

AFIRMACIÓN 8. *La sucesión $\{f_m\}$ converge fuertemente para f en el espacio H_1.*

En efecto, sabemos que $\mu_i(f_m) \to \mu_i(f) = 0$, pues $\mu = 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, N$. Puesto que el tercer término de

$$\left\|\nabla^1 E(f_m) - \mu_0(f_m)\nabla^1 J(f_m) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i(f_m)\nabla^1 F_i(f_m)\right\|_{H_1} \to 0$$

cuando $m \to \infty$, converge hacia cero, también $\mu_0(f_m) \to \lambda^2 > 0$, así que

$$\|\nabla^1 E(f_m) - \lambda^2(f_m - Gf_m)\|_{H_1} = \|\nabla^1 E(f_m) - \lambda^2\nabla^1 J(f_m)\|_{H_1} \to 0.$$

Pero $\nabla^1 E(f_m)$ y $G(f_m)$ convergen fuertemente en H_1, así se sigue la afirmación deseada, pues $G(f_m) \to G(f)$ fuertemente en H_1 y G es una biyección, por lo tanto $\|f_m - f\|_{H_1} \to 0$.

□

El teorema 2 se puede debilitar un poco más reduciendo las hipótesis del teorema de Clarke, en el siguiente resultado utilizamos el método de perturbaciones y mediante el uso de los principios dados en el aporte sobre soluciones periódicas [19], construiremos un operador que resulta débilmente continuo y permite utilizar el teorema 2 en la obtención de la solución periódica deseada.

TEOREMA 3. *Supóngase que $\nabla V(0) = 0$ y V es convexa en una vecindad $\mathfrak{A}$ de cero y que V no es idénticamente constante en $\mathfrak{A}$. Entonces existe una solución no trivial periódica f para el problema*

$$D^2 f + \nabla V(f) = 0$$

que está contenida en $\mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $V(0)=0$ y en esta forma $V(x)$ queda definida positiva, esto es $V(x)\geq 0$ para $\|x\|$ suficientemente pequeño.
Sea $V^\epsilon(x)=V(x)+\epsilon\|x\|^2$, $\epsilon>0$, fijando un número $c>0$, entonces V^ϵ satisface las hipótesis del teorema 2, así existe una función f_ϵ tal que

(1) $$-\mu_\epsilon D^2 f_\epsilon=\nabla V^\epsilon(f_\epsilon)$$

(2) $$\|Df_\epsilon\|_0^2=c$$

Nótese que (2) es una consecuencia del hecho establecido al final de la demostración del teorema 2 en la afirmación 8, la cual afirma que f_m converge fuertemente a f en H_1. Recuérdese además que μ_ϵ es un multiplicador de Lagrange el cual se mostró que es positivo.
Veamos finalmente que el rango de valores positivos de μ_ϵ es acotado y acotado lejos de cero
Se sabe de la proposición 1 del numeral 1, que el operador de Green G es el inverso de $(I-D^2)$ así que $-GD^2=I-G$. Por esto (1) es equivalente a

(3) $$f_\epsilon=Gf_\epsilon+\frac{1}{\mu_\epsilon}K^\epsilon(f_\epsilon)$$

donde $K^\epsilon(f_\epsilon)=G\nabla V^\epsilon(f_\epsilon)$. Para cada $\epsilon>0$, el operador K^ϵ es débilmente continua, esto es, si $f_n \rightharpoonup f$ en H_1 entonces

$$\|K^\epsilon(f_n)-K^\epsilon(f)\|_{H_1}\to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

esto es debido al hecho de que el operador de Green G es débilmente continuo.

AFIRMACIÓN 1. *Existe una constante K_1, independientemente de ϵ, tal que toda solución f_ϵ de (1) y (2) satisface $\|f_\epsilon\|_1\leq K_1$.*

En efecto, de la prueba del teorema 2 variando ϵ, en las afirmaciones 4 y 5, con un adecuado cubrimiento de Lebesque para la corona Ω se obtiene la constante K_1 deseada.
Ahora sea $\epsilon_n\to 0$ y para cada $\epsilon=\epsilon_n$ elijamos una solución f_{ϵ_n} de (1) y de (2). De la afirmación 1, se sigue que por paso a una subsucesión podemos suponer que $f_{\epsilon_n}\rightharpoonup f_\epsilon$ para algún $f_\epsilon\in H_1$. Deseamos escoger las soluciones f_ϵ tal que $f_\epsilon\neq 0$. Se recuerda que cada solución f_ϵ es obtenida por deformación continua de algún ciclo f_*, y que $E_\epsilon(f_\epsilon)\geq E_\epsilon(f_*)$ de donde

$$E_\epsilon(f)=\int_0^{2\pi}V^\epsilon(f(t))dt.$$

Sea f_* el mismo para todo ϵ, y lo podemos escoger de tal manera que

$$\int_0^{2\pi}V(f_*(t))dt>0.$$

Entonces

$$E(f)=\lim_{n\to\infty}E_{\epsilon_n}(f_{\epsilon_n})\geq\int_0^{2\pi}V(f_*(t))dt>0$$

de donde $f\neq 0$.

Se demostrará más adelante la posibilidad de construir constantes K_2, K_3 tales que

(4) $$K_2 \geq \mu_\epsilon \geq K_3 > 0.$$

Siendo efectuado esto, podemos suponer, una vez más por paso a una subsucesión que $\frac{1}{\mu_\epsilon} \to \frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$. Tenemos entonces

$$f_{\epsilon_n} = Gf_{\epsilon_n} + \frac{1}{\mu_{\epsilon_n}} K^{\epsilon_n}(f_{\epsilon_n})$$

Como G y $K^{\epsilon_n}()$ son débilmente continuas y de la construcción de K^ϵ con respecto a ϵ, obtenemos

$$\|Gf_{\epsilon_n} - Gf\|_{H_1} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\left\| \frac{1}{\mu_{\epsilon_n}} K^{\epsilon_n}(f_{\epsilon_n}) - \frac{1}{\mu} K(f) \right\|_{H_1} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

donde $K(f) = G\nabla V(f)$. Por esto

$$f = Gf + \frac{1}{\mu} K(f), \text{ es decir } \nabla V(f) = -\mu D^2 f.$$

También $\|f_{\epsilon_n} - f\|_{H_1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que $\|Df\|_0^2 = c$.

Por esto, $f \neq$ constante. Para completar la demostración establezcamos (4). Basta probar que $\{\mu_\epsilon\}$ es acotada superiormente, tomando el producto $(,)_0$ en (1) con f_ϵ e integrando obtenemos

$$(-\mu_\epsilon D^2 f_\epsilon, f_\epsilon)_0 = (\nabla V^\epsilon(f_\epsilon), f_\epsilon)_0$$

lo cual es equivalente a

$$\mu_\epsilon (Df_\epsilon, Df_\epsilon)_0 = (\nabla V^\epsilon(f_\epsilon), f_\epsilon)_0$$

de donde

$$\mu_\epsilon c = (\nabla V^\epsilon(f_\epsilon), f_\epsilon)_0 = \int_0^{2\pi} \langle \nabla V^\epsilon(f_\epsilon(t)), f_\epsilon(t) \rangle dt$$

y el límite superior puede ser obtenido del lado derecho de esta igualdad, obtenemos que f_ϵ es acotado en $(,)_0$–norma.

Para mostrar que $(\nabla V^\epsilon(f_\epsilon), f_\epsilon)_0$ es acotado lejos de cero, mostremos que

$$\langle \nabla V^\epsilon(x), x \rangle \geq V^\epsilon(x),$$

en cuyo caso se tendría

$$\mu_\epsilon c \geq \int_0^{2\pi} V^\epsilon(f_\epsilon(t))dt > \int_0^{2\pi} V(f_*(t))dt > 0.$$

Para completar la demostración mostremos la siguiente afirmación

AFIRMACIÓN 2. *Supóngase que* $\nabla u(0) = 0$ *y* u *es convexa en una vecindad de cero* $\mathfrak{A}$*, además* $u(0) = 0$*, entonces se tiene que*

$$\langle \nabla u(x), x \rangle > u(x).$$

En efecto esta desigualdad variacional se obtiene, mediante el teorema del valor medio como sigue; tómese $\mathcal{B}$ una bola centrada en el origen, tenemos para cada $x \in \mathcal{B}$

$$u(x) = u(0) + \sum_{i=1}^{N} x_i u_i(\theta_1 x), \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1$$

donde

$$u_i(\theta_1 x) = u_i(x - (1 - \theta_1)x)$$

$$= u_i(x) - (1-\theta_1)\sum_{j=1}^{N} x_j u_{ij}(x - \theta_2(1-\theta_1)x)$$
$$= u_i(x) - (1-\theta_1)\sum_{j=1}^{N} x_j u_{ij}(\theta x).$$

donde θ es constante. De esto

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i u_i(x) - (1-\theta_1)\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j u_{ij}(\theta x)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{N} x_i u_i(x) \leq (x_1, x_2, \ldots, x_N)(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \langle x, \nabla u\rangle$$

y la demostración es ahora completa.

SOLUCIÓN PERIÓDICA PARA EL CASO NO HOMOGÉNEO.

Nos hacemos ahora la siguente pregunta:
III. ¿Qué sucede con las soluciones periódicas para un sistema no homogéneo de la forma

$$D^2 f(t) + \nabla V(f(t)) = p(t) \quad ?$$

Para dar una respuesta favorable al problema cuestionado, fue necesario estudiar una conferencia dada por H. Schaefer $[14]$ quien tomando funciones homogéneas $V : \Re^N \longrightarrow \Re$ demostró la siguiente alternativa de Rouche-Frobenius: "si el sistema homogéneo lineal de segundo orden

$$D^2 V(t) + aDV(t) + V(t) = 0$$

no tiene soluciones π-periódicas distintas de $V \equiv 0$, entonces para cada función f, π-periódica existe una única solución π-periódica para el sistema

$$D^2 V(t) + aDV(t) + V(t) = f(t) \quad ".$$

En lo que sigue nos referiremos a este resultado como al teorema de Schaefer.
Con el fin de aplicar el teorema de Schaefer, tomemos $V \in C^1(\Re^N, \Re)$ una función homogénea de grado dos, esto es, se tiene que

$$V(tx) = t^2 V(x) \text{ para } t > 0 \text{ y } x \in \Re^N$$

y entonces $\nabla V(t)$ resulta ser homogénea de orden uno, esto es

$$(1) \qquad \nabla V(tx) = tV(x) \text{ para } t > 0 \text{ y } x \in \Re^N$$

Aplicando la identidad de Euler a V se tiene

$$\langle x, \nabla V(x)\rangle = 2V(x) \text{ para todo } x \in \Re^N.$$

DEFINICIÓN 1. *Sea $V \in C^1(\Re^N, \Re)$ una función homogénea de grado 2 se dice que V es definida positiva, si para $x \in \Re^N - \{0\}$ se tiene*

$$V(x) \geq 0.$$

Se dirá que V es definida estrictamente positiva si para $x \in \Re^N - \{0\}$ entonces

$$V(x) > 0.$$

La respuesta al problema III la encontramos en el siguiente resultado, el cual demostraremos siguiendo el método de compacidad de tan frecuente utilización en el análisis no estandar.

TEOREMA 4. *Sea* $V \in C^1(\Re^N, \Re)$ *una función homogénea de grado dos y definida positiva. Si el sistema*

(2) $$D^2 f(t) + \nabla V(f(t)) = 0$$

no tiene soluciones π*-periódicas no triviales, o sea distintas de* $f(t) = 0$*, entonces para cualquier función* π*-periódica* $p \in C^1(\Re, \Re^N)$ *el sistema*

(3) $$D^2 f(t) + \nabla V(f(t)) = p(t)$$

tiene al menos una solución π*-periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero una condición más fuerte, que V sea definida estrictamente positiva.

AFIRMACIÓN 1. *Si* V *es estrictamente positiva y* $p \in C^1(\Re, \Re^N)$ *es* π*-periódica para* $\epsilon > 0$*, el sistema*

(4) $$D^2 f(t) + \epsilon D f(t) + \nabla V(f(t)) = p(t)$$

tiene por lo menos una solución π*-periódica.*

Para mostrar la afirmación usamos el método condicional de Leray–Schauder $([15])$. Sea $\|\cdot\|$ denotando la norma Euclidiana de $\Re^N$ y sean H_π y H_π^1 los espacios de Banach de las funciones π–periódicas que son continuas y continuamente diferenciables respectivamente con las normas

$$\|v\|_\infty = \sup_{[0,2\pi]} \|v(t)\|, \qquad v \in H_\pi$$

$$\|v\|_1 = \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty, \qquad v \in H_\pi^1.$$

Puesto que cada vez que el sistema diferencial homogéneo lineal de segundo orden

(5) $$D^2 f(t) + \epsilon D f(t) + f(t) = 0$$

no tenga solución π–periódicas distintas de $f \equiv 0$ se sigue del teorema de Schaefer que para cada $g \in H_\pi$ existe una única solución π–periódica, para

(6) $$D^2 f(t) + \epsilon D f(t) + f(t) = g(t)$$

más aún, si denotamos la única solución π–periódica del sistema (6) por $K(g)$, en esta forma K puede ser visto como un operador lineal compacto de H_π en sí misma. Sea $N : H_\pi \longrightarrow H_\pi$ un operador completamente continuo definido por $N(f) = K(f + g - \nabla V(f))$.

AFIRMACIÓN 2. *Existe un número* $R > 0$ *tal que si* $\lambda \in [0,1]$ *y* $u \in H_\pi$*, entonces*

(7) $$f = \lambda \in N(f)$$

y se tiene que $\|f\|_\infty \leq R$*.*

Puesto que (7) se tiene sí y sólo sí

(8) $$D^2f(t)+\epsilon Df(t)+(1-\lambda)f(t)+\lambda\nabla V(f(t))=\lambda p(t)$$

y puesto que $\|f\|_\infty\leq\|f\|_1$ si $f\in H^1_\pi$ supongamos que la afirmación 2 es falsa, deducimos la existencia de una sucesión $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ y una sucesión correspondiente de números $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $f_m(t)$ tiene una solución cuando $\lambda=\lambda_m$ para $m=1,2,\ldots,\ \lambda_m\in[0,1]$ y

(9) $$\|f_m\|_1\to\infty \text{ cuando } m\to\infty.$$

Tomando $w_m(t)=\frac{f_m(t)}{\|f_m\|_1}$ para $m=1,2,\ldots$ se sigue de la homogeneidad de ∇V que

(10) $$D^2w_m(t)+\epsilon Dw_m(t)+(1-\lambda_m)w_m(t)+\lambda_m\nabla V(w_m(t))=\frac{\lambda_m p(t)}{\|f_m\|_1},$$

para $m=1,2,\ldots$. Puesto que $\|w_m\|_1=1$ para $m\geq 1$, se sigue de (10) que la sucesión $\{\|D^2(w_m)\|_\infty\}_{m=1}^\infty$ es acotada. Por lo tanto ambas sucesiones $\{w_m(t)\}_{m=1}^\infty$ y $\{Dw_m\}_{m=1}^\infty$son equicontinuas y uniformemente acotadas en $(-\infty,\infty)$ así por el teorema de Ascoli existen subsucesiones $\{w_{m_k}(t)\}_{k=1}^\infty$, $\{Dw_k(t)\}_{k=1}^\infty$ y un $w\in H^1_\pi$ con $\|w\|_1=1$ tales que $w_{m_k}(t)\to w(t)$, $Dw_{m_k}\to Dw$ cuando $k\to\infty$, uniformemente en $(-\infty,\infty)$. Puesto que $0\leq\lambda_{m_k}\leq 1$ para todo $k\geq 0$ podemos suponer sin perder generalidad que

$$\lambda_{m_k}\to\lambda^*\in[0,1] \text{ cuando } k\to\infty.$$

Por lo tanto de (10), se sigue que la sucesión $\{D^2w_{m_k}(t)\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en $(-\infty,\infty)$ así w es de clase C^2 y

(11) $$D^2w(t)+\epsilon Dw(t)+(1-\lambda^*)w(t)+\lambda^*\nabla V(w(t))=0$$

Tomando producto interno de (11) con $Dw(t)$ y observando que

$$\int_0^{2\pi}(Dw(t),D^2w(t))dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}|Dw(t)|^2dt=0$$

y

$$\int_0^{2\pi}(Dw(t),(1-\lambda^*)w(t)+\lambda^*\nabla V(w(t)))dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(1-\lambda^*)|w(t)|^2+\lambda^*V(w(t))\right]dt=0$$

hallamos que

$$\epsilon\int_0^{2\pi}|w'(t)|^2dt=0$$

De esto $w(t)=\delta=$ constante y de acuerdo con (11)

$$(1-\lambda^*)\delta+\lambda^*\nabla V(\delta)=0.$$

Tomando producto interno de esta última ecuación con δ y usando la identidad de Euler $(x,\nabla V(x))=2V(x)$ tenemos

$$(1-\lambda^*)|\delta|^2+2\lambda^*V(\delta)=0$$

Así, puesto que $0<\lambda^*<1$, se sigue de la definición 1 que $\delta=0$. Puesto que esto contradice el hecho de que $\|w\|_1=1$, la afirmación 2 se cumple y queda establecida.

Por el teorema de Leray-Schauder-Schaefer, se sigue que para cada $\lambda\in[0,1]$ existe $f\in H_\pi$ tal que $f=\lambda N(f)$. En particular puesto que

$f=N(f)$ tenemos una solución cuando $\lambda=1$, se sigue que (4) tiene al menos una solución $\pi-$ periódica.
Sea $\{\epsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\epsilon_m\to 0$ cuando $m\to\infty$, y para esta sucesión se tiene que para cada $m=1,2,\ldots$ existe $f_m\in H_\pi$ tal que f_m es solución de (5) cuando $\epsilon=\epsilon_m$.

AFIRMACIÓN 3. *La sucesión* $\{\|f_m\|_1\}_{m=1}^{\infty}$ *es acotada*.

En efecto supongamos lo contrario, podemos considerar sin perder generalidad que $\|f_m\|_1\to\infty$ cuando $m\to\infty$. Tómese

$$z_m(t)=\frac{f_m(t)}{\|f_m\|_1} \quad \text{para} \quad m\geq 1,$$

tenemos por la homogeneidad de ∇V que

$$D^2 z_m(t)+\epsilon_m D(z_m(t))+\nabla V(z_m(t))=\frac{P(t)}{\|f_m\|_1} \tag{12}$$

para $m=1,2,\ldots$; de esto se sigue que las sucesiones $\{z_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{Dz_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ son equicontinuas y uniformemente acotadas en $(-\infty,\infty)$ así existe $z\in H_\pi$ con $\|z\|_1=1$ y una subsucesión $\{z_{m_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $z_{m_k}(t)\to z(t)$ y además $Dz_{m_k}(t)\to Dz(t)$ cuando $k\to\infty$ con respecto a $t\in(-\infty,\infty)$. De (12), deducimos que la sucesión $\{D^2 z_{m_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $(-\infty,\infty)$. Por esto z es de clase C^2 y

$$D^2 z(t)+\nabla V(z(t))=0.$$

Puesto que $\|z\|_1=1$, esto es contradictorio al hecho de que por hipótesis $D^2 f(t)+\nabla V(f(t))=0$ no tiene soluciones π–periódicas no triviales y la afirmación 3 queda establecida.

De la ecuación diferencial

$$D^2 f_m(t)+\epsilon_m D(f_m(t))+\nabla V(f_m(t))=p(t),$$

se sigue que la sucesión $\{D^2 f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada en $(-\infty,\infty)$. Por lo tanto, usando el mismo tipo de argumentación utilizada en la prueba de la afirmación 3, concluimos la existencia de una subsucesión de $\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ tal que tanto esta subsucesión como la correspondiente subsucesión de segundas derivadas converge uniformemente en $(-\infty,\infty)$. Puesto que el límite de esta subsucesión es una solución π–periódica de

$$D^2 f(t)+\nabla V(f(t))=p(t)$$

la demostración del teorema bajo la hipótesis de que V es estrictamente definida positiva es completa, o sea, hemos probado la afirmación 1.

Para demostrar el teorema 4, bajo la hipótesis de que $V(x)$ sea definida positiva, observamos que para $\delta>0$ suficientemente pequeño; el sistema

$$D^2 f(t)+\delta f(t)+\nabla V(f(t))=0$$

no tiene solución π–periódica no trivial. En verdad en caso contrario, para $\delta>0$ arbitrariamente pequeño, podríamos hallar una solución con

H_π–norma igual a 1. Una argumentación de compacidad, análogo al ya usado en la afirmación 1, podría darnos una π–solución no trivial de $D^2f(t)+\nabla V(f(t))=0$ en franca contradicción con la hipótesis. Por lo tanto puesto que $\frac{\delta}{2}\|x\|^2+V(x)>0$ para $x\neq 0$ pero podemos mostrar, para $\delta>0$ pequeño, la existencia de una solución π–periódica de

$$D^2f(t)+\delta f(t)+\nabla V(f(t))=p(t).$$

La H^1_π– normas de estas soluciones son acotadas cuando $\delta\to 0$ puesto que $D^2f(t)+\nabla V(f(t))=0$ no tiene solución π–periódicas. Por lo tanto por el mismo tipo de argumentación de compacidad, tal como lo hemos usado en las afirmaciones 1, 2 y 3 de arriba, obtenemos una solución π–periódica de $D^2f(t)+\nabla V(f(t))=p(t)$ como lo deseamos.

APENDICE

Me propongo dar aquí una demostración de un teorema, que es pieza fundamental en la demostración del teorema de Clarke y de la teoría del minimax en general.

TEOREMA. *Sea H un espacio de Hilbert real, sea*

$$\Gamma_k=\{A\subseteq H-\{0\};\ A \text{ es compacto, } A=-A, \gamma(A)\geq k\ \}$$

sea $f\in C^2(H,\Re)$ y supóngase que f satisface la condición (P–S) además, $f(-x)=f(x)$, $f(0)=0$ y para $k=1,2,\dots$ sea

$$c_k(f)=\inf_{A\in\Gamma_k}\ \sup_{x\in A} f(x)$$

se tiene si $-\infty<c_m(f)<0$ para $m\geq 1$, entonces existe $\overline{x}\in H$ tal que $\nabla f(\overline{x})=0$ y $f(\overline{x})=c_m(f)$. Si existen $r\geq 1, m\geq 1$ para los cuales $-\infty<c_{m-r}(f)=\cdots=c_{m+r}(f)=c<0$ entonces $\gamma(K(c))\geq r+1$ donde $K(c)=\{x\in H\,;\ f(x)=c,\ \nabla f(x)=0\}$.

NOTAS. (1) se puede demostrar que $\Gamma_{k+1}\subset\Gamma_k$, en estas condiciones

$$b_{m+1}(t)=\inf_{B\in\Gamma_{m+1}}\ \max_{x\in B} f(x)\geq \inf_{B\in\Gamma_m}\ \max_{x\in B} f(x)=b_m(f)$$

(2)Para ver que $b_m(f)\leq 0$, dado $\epsilon>0$ escójase $\delta>0$ tal que $\|x\|\leq\delta$ entonces $|f(x)|<\epsilon$, esto es posible porque $f(0)=0$ y f es continua. Sea H_m un subespacio m–dimensional de H y sea

$$A=\{x/x\in H_m \text{ y } \|x\|=\delta\}.$$

Fácilmente se tiene que existe $T\in L(H_m,\Re^m)$ tal que $T(A)=S^{m-1}$, T no singular, por lo tanto $\gamma(A)=\gamma(S^{m-1})=m$, $A\in\Gamma_m$, $\max_{x\in A} f(x)<\epsilon$ además

$$b_m(f)=\inf_{B\in\Gamma_m}\max_{x\in B} f(x)<\epsilon$$

puesto que $\epsilon>0$ es arbitrario, $b_m(f)\leq 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supóngase $-\infty<b_m(f)<0$, $c=b_m(f)$ y además por contradicción a la afirmación, que $K(c)=$ ø. Existe un flujo

$$\eta:\Re\times H\longrightarrow H \text{ y } d>0 \text{ tal que } \eta(1,A_{c+d})\subset A_{c-d}$$

más aún

$$\eta(1,-x) = -\eta(1,x), \qquad A_{c+d} = \{x/\, f(x) \le c+d\}.$$

De acuerdo a la definición de $c = b_m(f)$ existe $S \in \Gamma_m$ tal que

$$\max_{x \in S} f(x) < c+d$$

Sea $S^* = \eta(1,s) \subset A_{c-d}$, puesto que la aplicación $x \to \eta(1,x)$ es un homeomorfismo impar, $\gamma(S^*) = \gamma(S)$ así $\gamma(S^*) \ge m$ y $S^* \in \Gamma_m$. Por lo tanto

$$\max_{x \in S^*} f(x) = c-d < c = \inf_{s \in \Gamma_m} \max_{x \in S} f(x)$$

lo cual es una contradicción.

En seguida supóngase $-\infty < b_m(f) = b_{m+1}(f) = \cdots = b_{m+r}(f) = c < \infty$ también que $\gamma(K(c)) < r+1$, así $\gamma(K(c)) \le r$. Por la condición (P-S), $K(c)$ es compacto. Por lo tanto existe un conjunto abierto U tal que $0 \notin \overline{U}$, $\overline{U} = -\overline{U}$, $K(c) \subset U$ y $\gamma(K(c)) = \gamma(\overline{U}) \le r$. De acuerdo al teorema básico de deformación existe $d > 0$ y un flujo $\eta : \Re \times H \longrightarrow H$ tal que

$$\eta(1, A_{c+d} - U) \subset A_{c-d}, \qquad \eta(1,x) = -\eta(1,-x).$$

Puesto que

$$c = b_{m+r}(f) = \inf_{B \in \Gamma_{m+r}} \max_{x \in B} f(x)$$

existe $S \in \Gamma_{m+r}$ con

$$\max_{x \in S} f(x) < c+d.$$

Por consiguiente $S \subseteq A_{c+d}$ tenemos $S \subseteq (S-U) \cup \overline{U}$ así

$$n + r \le \gamma(S) \le \gamma(S-U) + \gamma(\overline{U}) \le \gamma(S-U) + r.$$

Por lo tanto $m \le \gamma(S-U)$, $S - U \in \Gamma_m$, $S - U \subseteq A_{c+d} - U$

$$\eta(1, S-U) \subset A_{c-d}, \qquad S^* \in \Gamma_m$$

$$\max_{x \in S} f(x) \le c-d < c = \inf_{B \in \Gamma_m} \max_{x \in B} f(x)$$

lo cual es contradictorio.

Por lo tanto

$$\gamma(K(c)) \ge r+1.$$

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Castro, A., *Métodos Variacionales y Análisis Funcional no lineal.* X Coloquio Colombiano de Matemáticas. Paipa, 1980.

[2] Castro, A., *Métodos de Reducción vía Minimax*. Primer Simposio de Análisis. Medellin. 1981.

[3] Clarke, F., *A new approach to Lagrange Multipliers Mathematics of Operations Research*. (Mayo 1976)

[4] Clark, F.,"*On periodic solucions of autonomus Hamiltonian systems of ordinary differential Equations proceedings*" of A.M.S (1973) 579-584

[5] Clark, F.,"*A variant of the Lusternik-Schnierelmann theory*". Indiana Univ. Journal (1972)

[6] D'Ambrosio,U.,*Cálculo de Variaciones. Monografías Elementales*.

Sociedad Colombiana de Matemáticas.
[7] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York, 1964
[8] Hartman, P.,"*On Stability in the Large for Systems of ordinary differential equations*". Cand. J. Math. 480-492 (1964)
[9] Brézis, H., *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial (1984).
[10]Palais, R.,"*Lusternik-Schnierelmann theory on Banach manifords*" Topology, 5 (1970) 115-132.
[11] Palais, R., "*Critical point theory and minimax principles*". Proc. Sympos. Pure Math. (1970).
[12] Podolak, E.,"*On the range of operator equations with an asymptotically non linear term*". Indiana Univ. Math. J. 25 (1976) 1127-1137.
[13]Rabinowitz,P.,H.,"*Periodic Solutions of Hamiltonian Systems*". Pure and Applied Math. Vol. $XXXI$ (1978).
[14]Schaefer, H., "*Uber die Methode der priori Schranken*". Math. Ann. 29 (1955) 415-416.
[15]Schmitt,K., "*Periodic solutions of non linear second order ordinary differential equations*". Math. Z. 98 (1967) 200-207.
[16]Sánchez. H.,D., *El Análisis funcional en Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Seminario de Ecuaciones Diferenciales U.N.C 1984.
[17]Sánchez. H.,D.,*Elementos de Analisis no Lineal*. $VIII$. Coloquio Distrital de Matemáticas. Bogotá 1991.
[18]Sánchez. H.,D., "*Topología para un problema de minimax*". Matemática Vitual. www.branchingnature.org/aportes.htm
[19]Sánchez. H.,D.,"*Existencia de soluciones periódicas para un problema Hamiltoniano"*. Matemática Vitual. www.branchingnature.org/aportes.htm
[20] Sanchez. H.,D., "*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*". Matemática Vitual. Proyecto de aprendizaje de Matemátia Avanzada. www.branchingnature.org/Dariosanchez2003.htm
[21]Vainberg, M., *Variational methods in the study of non linear operators* Holden-Day, San Francisco (Calif.), 1964.

ДАЖЙ ЛЛЭЮ

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciables.

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora y a la Ingeniera Esperanza Nieto quienes leyeron todos los originales y cuidaron del buen manejo del lenguaje español.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com