

## APORTES

# TOPOLOGÍA PARA UN PROBLEMA DE MINIMAX

*José Darío Sánchez Hernández*  
*Bogotá - Colombia. Agosto - 2006*  
*danojuanos@hotmail.com*  
*danojuanos@tutopia.com*  
*danojuanos@yahoo.com*

Presento al ciberespacio los elementos de topología necesarios para los métodos de solución en ecuaciones diferenciales conocidos como teoría del *minimax* o teoría de Lusternik-Schnierelman y al final presento una aplicación a un problema que se resuelve mediante la utilización de esta teoría.

### §1. TEORÍA DEL GÉNERO.

La noción del género fue introducida por Krasnoselskii en 1952 y la presentamos a continuación.

Sea  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach,  $\Sigma(\mathbb{E})$  un conjunto de partes de  $\mathbb{E}$  tales que si  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$  entonces

(G1)  $A$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{E}$ .

(G2) Se debe tener que  $A = -A$ , donde  $-A = \{x \in \mathbb{E} / -x \in A\}$  en este caso se dice que  $A$  es simétrico.

(G3)  $0 \notin A$ .

Escribiremos  $A \in \Sigma$  para indicar que  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$  para algún espacio de Banach  $\mathbb{E}$ .

**DEFINICIÓN 1.1.** Si  $A \in \Sigma$  definimos el género de  $A$  como el más pequeño entero  $m \geq 1$  (si al menos uno existe) tal que exista una aplicación continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$  para la cual se tiene que " $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in A$ ". Si no existe un tal entero decimos que el género de  $A$  es infinito ( $= \infty$ ).

En general si  $A \in \Sigma$  será dentado por  $\gamma(A)$ .

**PROPOSICIÓN 1.2.** Sea  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$  entonces  $\gamma(S^n) = n + 1$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supóngase por contradicción que exista  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^k - \{0\}$  con  $k < n$ , continua y además  $f(-x) = -f(x)$ , sea  $i : \mathbb{R}^k - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  continua con  $i(-x) = -i(x)$  (esta aplicación no es otra que

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$$

si  $k < n$ ).

Tómese la función compuesta  $g = i \circ f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ , la cual cumple que

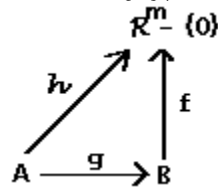
$$g(-x) = i(f(-x)) = i(-f(x)) = -i(f(x)) = -g(x).$$

Por otra parte  $g$  es continua, podemos en estas condiciones aplicar el teorema de Borsuk-Ulam para afirmar la existencia de  $x_0 \in S^n$ , tal que  $g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0)$ . Por lo tanto  $2g(x_0) = 0$ , entonces  $g(x_0) = 0$ . Esto es contradictorio puesto que  $g(S^n) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**PROPOSICIÓN 1.3.** Si  $A, B \in \Sigma$  y existe  $g \in C(A, B)$  con  $g(-x) = -g(x)$  entonces  $\gamma(A) \leq \gamma(B)$ . Si  $g$  es un homeomorfismo,  $\gamma(A) = \gamma(B)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\gamma(B) = \infty$ , la proposición es obvia. Supóngase entonces que  $\gamma(B) = m$  esto implica la existencia de

$$f \in C(B, \mathbb{R}^m - \{0\}) \text{ tal que } f(-u) = -f(u).$$



Claramente  $h = f \circ g \in C(A, \mathbb{R}^m - \{0\})$  donde  $h(-x) = -h(x)$ . Por lo tanto  $\gamma(A) \leq m \leq \gamma(B)$ . Si  $g$  es un homeomorfismo, entonces puesto que  $g^{-1}$  es impar se sigue  $\gamma(B) \leq \gamma(A)$ .

**DEFINICIÓN 1.4.** Sea  $A \subset \mathbb{E}$ , donde  $\mathbb{E}$  es un espacio de Banach real y  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$ . Si existen un entero  $m$  y subespacios  $C_1, C_2, \dots, C_m$  en  $\mathbb{E}$  tales que

(i)  $C_k \cap (-C_k) = \emptyset, 1 \leq k \leq m$

(ii)  $A \subset (\bigcup_{k=1}^m C_k) \cup (\bigcup_{k=1}^m (-C_k))$

en estas condiciones se denotará con  $\gamma^*(A)$  al más pequeño de tales enteros. Si no existe tal entero, se define  $\gamma^*(A) = \infty$ .

Es un ejercicio bastante interesante demostrar que  $\gamma(A) = \gamma^*(A)$ .

**PROPOSICIÓN 1.5.** Si  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$  y  $B \in \Sigma(\mathbb{E})$  entonces

$$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\gamma(A) = \infty$  ó  $\gamma(B) = \infty$  entonces claramente  $\gamma(A \cup B) = \infty$ . Supóngase que  $\gamma(A) = m < \infty$  y  $\gamma(B) = n < \infty$ .

De la definición 1.4 existen  $m$  subconjuntos cerrados  $C_1, C_2, \dots, C_m$  de  $\mathbb{E}$  con  $C_k \cap (-C_k) = \emptyset, k = 1, 2, \dots, m$  tales que  $A \subset \bigcup_{k=1}^m [C_k \cup (-C_k)]$ .

También existen  $n$  subconjuntos cerrados de  $\mathbb{E}$ ,  $D_1, D_2, \dots, D_n$  con  $D_j \cap (-D_j) = \emptyset, j = 1, 2, \dots, n$  y tales que  $B \subset \bigcup_{j=1}^n D_j \cup (-D_j)$  entonces se

tiene que

$$A \cup B \subset (\bigcup_{k=1}^m C_k \cup (-C_k)) \cup (\bigcup_{j=1}^n D_j \cup (-D_j))$$

siguiéndose que  $\gamma^*(A \cup B) \leq m + n$  así  $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$ .

**PROPOSICIÓN 1.6.** *Sea  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$ ,  $A$  es compacto entonces  $\gamma(A) < \infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $x \in A$  entonces  $B(x, r_x) \cap B(-x, r_x) = \emptyset$ , donde

$$r_x = \frac{1}{2}\|x\| > 0 \text{ y } B(x, r_x) = \{y \in \mathbb{E}; \|x - y\| \leq r_x\}.$$

Claramente  $B(-x, r_x) = -B(x, r_x)$ . Puesto que

$$A \subset \bigcup_{x \in A} [B(x, r_x) \cup B(-x, r_x)]$$

y  $A$  es compacta, entonces existen  $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$  tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m [B(x_k, r_{x_k}) \cup B(-x_k, r_{x_k})]$$

por lo tanto se sigue de la definición 1,4 que  $\gamma(A) < m < \infty$ .

□

Encontramos ahora una caracterización interesante de los conjuntos compactos de un espacio de Banach en el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 1.7.** *Sea  $A \in \Sigma(\mathbb{E})$ ,  $A$  compacto, existe un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{E}$  tal que  $A \subset U$ ,  $(\overline{U}) \in \Sigma(\mathbb{E})$  y  $\gamma(\overline{U}) = \gamma(A)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\gamma(A) = n$ , existe una aplicación continua impar  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Por el teorema de extensión de Tietze existe  $F \in C(\mathbb{E}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $F|_A = f$ . Si  $G(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x))$ ,  $G$  es impar ya que  $f(-x) = -f(x)$ ,  $G|_A = f$ . Por consiguiente  $0 \notin G(A) = f(A)$ , puesto que  $G(A)$  es compacto existe  $r > 0$  tal que  $\|y\| \geq 2r$  si  $y \in G(A)$ , ahora como  $G(A) = -G(A)$  si  $V = \{y/\text{existe } z \in G(A) \text{ con } |z - y| < r\}$  entonces  $V = -V$  y más aún si  $y \in V$  entonces  $\|y\| > r$ . Si  $U = G^{-1}(V)$  entonces  $U$  es un conjunto abierto que contiene a  $A$  y  $x \in U$  implica  $\|G(x)\| > r$ . Más aún  $U = -U$ .

Por continuidad  $x \in \overline{U}$  implica  $\|G(x)\| \geq r$ . Puesto que  $G(0) = 0$ ,  $\overline{U} \in \Sigma(\mathbb{E})$  y  $\gamma(\overline{U}) \leq n$ . Pero  $\gamma(\overline{U}) \geq \gamma(A) \geq n$ . Por lo tanto  $\gamma(\overline{U}) = \gamma(A) = n$ .

El siguiente resultado nos da un criterio para la determinación de los conjuntos infinitos de  $\mathbb{E}$ .

**PROPOSICIÓN 1.8.** *Si  $A \in \Sigma$  y  $\gamma(A) > 1$  entonces  $A$  contiene un número infinito de puntos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si por el contrario  $A$  contiene solamente un número finito de puntos, puesto que  $A = -A$ , entonces

$$A = \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \cup \{-y_1, -y_2, \dots, -y_k\}$$

se define ahora la función continua  $f: A \rightarrow \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \\ -1 & \text{si } x \in \{-y_1, -y_2, \dots, -y_k\} \end{cases}$$

puesto que  $f$  es una función impar continua se sigue que  $\gamma(A) = 1$  lo cual es una ( $\rightarrow\leftarrow$ ) contradicción.

## §2. CONTINUIDAD DÉBIL.

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real, separable con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión que converge débilmente a  $x$ , es decir la sucesión  $\{\langle x_n, f \rangle\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\langle x, f \rangle$  para todo  $f \in \mathcal{H}$  entonces escribimos  $x_n \rightharpoonup x$ . Consideremos ahora  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach con norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ .

**DEFINICIÓN 2.1.** Una función  $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{E}$  se dice débilmente continua ó, continua con respecto a la topología débil si se da una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $x_n \rightharpoonup x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\|g(x_n) - g(x)\|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

**PROPOSICIÓN 2.2.** Si  $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{E}$  es una función débilmente continua entonces  $g \in C(\mathcal{H}, \mathbb{E})$ . Si  $A \subset \mathcal{H}$  y  $A$  es compacto entonces la restricción  $g|_A$  es uniformemente continua con respecto a la norma  $\|\cdot\|$  de  $\mathcal{H}$ . Más aún  $g(A)$  es un conjunto acotado en  $\mathbb{E}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos la segunda parte, esto es que  $g|_A$  es uniformemente continua, para lo cual suponemos por contradicción que no es uniformemente continua, entonces existe un número  $\epsilon > 0$ , sucesiones  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  con  $x_n \in A$ ,  $y_n \in A$  para todo  $n$  tales que  $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$  y  $|g(x_n) - g(y_n)|_{\mathbb{E}} \geq \epsilon > 0$ , para todo  $n$ .

Puesto que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada, existe una subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ , tal que  $x_{n_j} \rightharpoonup \bar{x} \in \mathcal{H}$  es decir para todo  $v \in \mathcal{H}$  se tiene  $\langle x_{n_j}, v \rangle \rightarrow \langle \bar{x}, v \rangle$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , ahora

$$\begin{aligned} |\langle \bar{x}, v \rangle - \langle y_{n_j}, v \rangle| &\leq |\langle \bar{x}, v \rangle - \langle x_{n_j}, v \rangle| + \|x_{n_j} - y_{n_j}\| \|v\| \\ &\leq \frac{1}{n_j} \|v\| + |\langle \bar{x}, v \rangle - \langle x_{n_j}, v \rangle| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando  $j \rightarrow \infty$ , así  $y_{n_j} \rightharpoonup \bar{x}$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Por lo tanto

$$|g(x_{n_j}) - g(\bar{x})|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0 \text{ y } |g(y_{n_j}) - g(\bar{x})|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0$$

entonces  $|g(x_{n_j}) - g(y_{n_j})|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0$  lo cual es ( $\rightarrow \leftarrow$ ) contradictorio. Esto muestra que  $g|_A$  es uniformemente continua.

Ahora  $g(A)$  es acotado, puesto que si no lo es, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  con  $x_n \in A$  para toda  $n$  tal que  $|g(x_n)|_{\mathbb{E}} \geq n$ . Puesto que  $A$  es acotado existirá una subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$  con  $x_{n_j} \rightharpoonup \bar{x} \in \mathcal{H}$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto  $|g(x_{n_j}) - g(\bar{x})|_{\mathbb{E}} \rightarrow 0$ , lo cual es ( $\rightarrow \leftarrow$ ) contradictorio.

**PROPOSICIÓN 2.3.** Si  $f \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$  y  $\nabla f$  es débilmente continua, entonces  $f$  es débilmente continua.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$  tal que  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ . Recordemos que por el teorema del valor medio se tiene

$$f(x_n) - f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x})), x_n - \bar{x} \rangle, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1.$$

Ahora dado  $v \in \mathcal{H}$  se tiene

$$\langle \bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x}), v \rangle = \langle \bar{x}, v \rangle + \theta_n \langle x_n - \bar{x}, v \rangle \rightarrow \langle \bar{x}, v \rangle$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . También se tiene

$$f(x_n) - f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x}), x_n - \bar{x} \rangle + \langle \nabla f(\bar{x}), x_n - \bar{x} \rangle$$

como

$$|\langle \nabla f(\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x}), x_n - \bar{x} \rangle| \leq \|\nabla f(\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x})\| \|x_n - \bar{x}\|$$

Pero las sucesiones débilmente convergentes son siempre acotadas, por lo tanto existe  $M$  tal que  $\|x_n - \bar{x}\| \leq M$  para todo  $n$ . Ahora como  $\nabla f$  es débilmente continua y  $\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x}) \rightharpoonup \bar{x}$ , entonces

$$\|\nabla f(\bar{x} + \theta_n(x_n - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x})\| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto  $f(x_n) - f(\bar{x}) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**PROPOSICIÓN 2.4.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  un producto interno equivalente a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , es decir una aplicación de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_1$  que es bilineal, simétrica, definida positiva y existen constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que  $C_1 \|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$  donde  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  y  $\|x\|_1 = \sqrt{\langle x, x \rangle_1}$ . Dada una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{H}$  y  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  tal que  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$  con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entonces  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$  con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Supóngase que  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$  con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para  $y \in \mathcal{H}$  fijo, considérese la función  $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \langle x, y \rangle_1$ ,  $F$  es lineal y se tiene

$$F(x) \leq \|x\|_1 \|y\|_1 \leq C_2 \|x\| \|y\|$$

Aplicando el teorema de Riesz en  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existe  $y_* \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y_* \rangle \text{ para todo } x \in \mathcal{H}$$

y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_* \rangle = \langle \bar{x}, y_* \rangle = \langle \bar{x}, y \rangle_1.$$

Por lo tanto  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$  débilmente con respecto a la topología definida por el producto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ .

Finalizamos dando un criterio fundamental debido a Palais y Smale y conocida como la condición  $(P-S)$ .

**DEFINICIÓN 2.4.** *Sea  $f \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ ,  $f$  se dice que satisface la condición  $(P-S)$ , si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla f(x_n) = 0$  y  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada, entonces existe una subsucesión  $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$  que converge fuertemente.*

### §3. UN PROBLEMA DEL MINIMAX

Un resultado clásico que dio origen a la teoría del minimax la encontramos en [1], de donde lo tomamos y que constituye el famoso teorema de Lusternik–Schnierelmann, cuya demostración fue dada por D. Clark, [3]

**TEOREMA 3.1.** *Sea  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función que satisface la condición (P – S) y tal que  $f(0) = 0$ . Para cada  $m \leq \dim \mathbb{E}$ , sea*

$$c_m(f) = \inf_{\gamma(A) \geq m} \left( \sup_{x \in A} f(x) \right)$$

*Si  $-\infty < c_m(f) < 0$  entonces  $K_m = \{x \in \mathbb{E}; f(x) = c_m(f), f'(x) = 0\} \neq \emptyset$  y  $K_m$  es compacto. Más aún, si  $m \leq n$  y  $-\infty < c_m(f) = c_n(f) = c < 0$  entonces  $\gamma(K_m) \geq n - m + 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Ver [1].

Como una consecuencia del teorema 3.1 deducimos el siguiente resultado cuya demostración omitimos en este aporte.

**TEOREMA 3.2.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real, sea*

$\Gamma = \{A \subseteq \mathcal{H} - \{0\}; A \text{ es compacto, } A = -A, \gamma(A) \geq k\}$ ,  
*sea  $f \in C^2(\mathcal{H}, \mathfrak{R})$  y supóngase que  $f$  satisface la condición (P–S) además  $f(-x) = f(x)$ ,  $f(0) = 0$  y para cada  $k = 1, 2, \dots$ , sea*

$$c_k(f) = \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} f(x)$$

*se tiene si  $-\infty < c_m(f) < 0$  para  $m \geq 1$ , entonces existe  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  y  $f(\bar{x}) = c_m(f)$ .*

*Si existen  $r \geq 1$ ,  $m \geq 1$  para los cuales  $-\infty < c_{m-r}(f) = \dots = c_{m+r}(f) = c < 0$  entonces  $\gamma(K(c)) \geq r + 1$ , donde  $K(c) = \{x \in \mathcal{H}; f(x) = c, \nabla f(x) = 0\}$ .*

**DEFINICIÓN 3.3.** *Sea  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach real y  $M$  una  $C^1$ -subvariedad de  $\mathbb{E}$ . Sea  $f \in C^1(\mathbb{E}, \mathfrak{R})$ , se dice que  $p \in M$  es un punto crítico de  $f|_M$  si  $f'(p)v = 0$  para todo  $v \in TM_p$  donde  $f'(p) \in L(\mathbb{E}, \mathfrak{R}) = \mathbb{E}^*$ .*

En seguida presentamos un resultado de gran utilidad en el estudio de las soluciones periódicas de un sistema hamiltoniano autónomo.

**TEOREMA 3.4.** *Sea  $f \in C^2(\mathcal{H}, \mathfrak{R})$  supóngase además que*

(i)  $f(-x) = f(x)$ ,  $f(0) = 0$

(ii)  $\nabla f(x) = x - F(x)$  donde  $F$  es débilmente continua

(iii)  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$

(iv) *Existe un subespacio de dimensión finita  $M$  de  $\mathcal{H}$  con  $\dim M = n > 0$  tal que  $\langle D^2 f(0)y, y \rangle < 0$  para todo  $y \in M - \{0\}$ .*

*Bajo estas hipótesis existen al menos  $2n$  soluciones no cero (no triviales) distintas de  $\nabla f(x) = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos inicialmente que  $f$  satisface la condición  $(P - S)$  supóngase que  $\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  es acotada y  $\nabla f(x_m) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Existe  $r \geq 0$  tal que  $\|x_m\| \leq r$  para todo  $m$ , así existe una subsucesión  $\{x_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$  de  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  tal que  $x_{m_l} \rightarrow \bar{x}$ . Por lo tanto como  $F$  es débilmente continua  $\|F(x_{m_l}) - F(\bar{x})\| \rightarrow 0$  cuando  $l \rightarrow \infty$ , puesto que  $\nabla f(x_{m_l}) = x_{m_l} - F(x_{m_l})$  tiende hacia cero cuando  $l \rightarrow \infty$ , así  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{m_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} F(x_{m_l}) = F(\bar{x})$ , ya que como  $x_{m_l} \rightarrow \bar{x}$  entonces  $\bar{x} - F(\bar{x}) = 0$ .

En seguida afirmamos la existencia de un  $\alpha$  tal que  $f(x) \geq \alpha$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ , en efecto, puesto que  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$  existe  $R > 0$  tal que  $f(x) \geq 0$  si  $\|x\| \geq R$ , así  $\nabla f(x) = x - F(x)$  donde  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - g(x)$  siendo  $g(x)$  tal que  $\nabla g = F$ . Ahora como  $F$  es débilmente continua entonces  $g$  también es débilmente continua. Por consiguiente como  $\{x/\|x\| \leq R\}$  es cerrado, convexo y acotado, existe  $x_0$  tal que  $\|x_0\| \leq R$  y  $g(x_0) = \max_{\|x\| \leq R} g(x)$ . Por lo tanto si  $\|x\| \leq R$ ,  $f(x) \geq -g(x_0)$  así  $f(x) > \alpha$  para todo  $x \in \mathcal{H}$  donde  $\alpha = \min\{0, g(x_0)\}$ .

Puesto que  $\dim M = n < \infty$ , existe  $m > 0$  tal que  $\langle D^2 f(0)y, y \rangle \leq m\|y\|^2$  para todo  $y \in M$ , en efecto puesto que  $\{y \in M; \|y\| = 1\} = C$  es compacto y  $\langle D^2 f(0)y, y \rangle < 0$  para todo  $y \in C$ , existe  $m > 0$  tal que  $\langle D^2 f(0)y, y \rangle \leq -m$  para todo  $y \in C$ .

Sea  $\delta > 0$  tan pequeño que si  $\|x\| \leq \delta$  entonces  $\|D^2 f(0) - D^2 f(x)\| < \frac{m}{2}$ . Sea ahora  $A = \{y \in M; \|y\| = \delta\}$ , entonces existe  $T$  no singular,  $T \in L(M, \mathbb{R}^n)$  tal que  $T(A) = S^{n-1}$ , y  $\gamma(A) = \gamma(S^{n-1}) = n$ . Para  $y \in A$  tenemos

$$f(y) - f(0) = \langle \nabla f(0), y \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\theta y)y, y \rangle = \frac{1}{2} \langle D^2 f(\theta y)y, y \rangle$$

dado que  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = f(-x)$  entonces  $\nabla f(0) = 0$ , luego

$$f(y) = \frac{1}{2} \langle D^2 f(0)y, y \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\theta y) - D^2 f(0)y, y \rangle$$

$$f(y) \leq -\frac{m}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2} \|D^2 f(\theta y) - D^2 f(0)\| \|y\|^2 \leq -\frac{m}{2}\delta^2 + \frac{m}{4}\delta^2 = -\frac{m}{4}\delta^2$$

Como  $\gamma(A) = n$ ,  $A \in \Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\max_{x \in A} f(x) \leq -\frac{m}{4}\delta^2 < 0$ .

Si  $B \in \Gamma_k$ ,  $\max_{x \in B} f(x) \geq \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) \geq \alpha > -\infty$ , teniéndose

$$b_k(f) = \inf_{B \in \Gamma_k} \max_{x \in B} f(x) \geq \alpha.$$

Así  $-\infty < b_k(f) < 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  en estas condiciones se puede demostrar que existe  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  tal que  $f(x_k) = b_k(f)$  y  $\nabla f(x_k) = 0$ , puesto que  $b_k(f) < 0$  y  $f(0) = 0$ ,  $x_k \neq 0$ . Si  $1 \leq j < l < n$  y  $b_j(f) = b_{j+1}(f) = \dots = b_l(f) = c$ , entonces  $\gamma(K(c)) \geq l - j + 1 \geq 2$  así del teorema 3.2 existen infinidad de soluciones de  $\nabla f(x) = 0$  tales que  $f(x) = c$ . Por el mismo resultado se sigue que si  $-\infty < b_1(f) < b_2(f) < \dots < b_n(f) < 0$  entonces el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, -x_1, -x_2, \dots, -x_n\}$  está formado por  $2n$  soluciones no cero distintas de  $\nabla f(x) = 0$ .



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Castro A., *Métodos Variacionales y Análisis funcional no lineal*, X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa, 1980.
- [2] Castro A., *Métodos de Reducción via Minimax*, I Seminario de Análisis, Medellín 1981.
- [3] Clark D., "On periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems of ordinary differential equation". Proc. An. Math. Soc. (1973) 579–584.
- [4] Clarke F., *A variant of the Lusternik–Schnierelman theory*, Indiana Univ. J (1972).
- [5] Palais R., "Lusternik–Schnierelman theory on Banach manifolds". Topology, 5 (1966), 115–132.
- [6] Palais R., "Critical point theory and minimax principles", Proc. Sympos. Pure Math. (1970).

## ДАЖЙ ЛЛЭЮ

*Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje del análisis no lineal.*

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora y a la Ingeniera Esperanza Nieto quienes leyeron todos los originales y cuidaron del buen manejo del lenguaje español.

*Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:*

danojuanos@hotmail.com,

danojuanos@tutopia.com

danojuanos@yahoo.com

*Copyright© Darío Sánchez Hernández*