

APORTES

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA UN PROBLEMA HAMILTONIANO

José Darío Sánchez Hernández
Bogotá - Colombia. Agosto - 2006
danojuanos@hotmail.com
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

A continuación presento a los amables cibernautas una conferencia que dicté en el primer encuentro de topología realizado en el departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, a principios de la década de los noventa. En dicha conferencia presentaba el desarrollo de un problema de una ecuación de segundo orden del tipo Hamiltoniano, junto con el espacio, los operadores usados y el convencimiento de llegar a una solución y así obtener un resultado favorable.

Me propongo en el presente aporte, plantear el método de hallar las soluciones periódicas para el problema hamiltoniano de segundo orden siguiente

$$(1) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + \nabla V(f) = 0$$

1. PRELIMINARES.

Sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathfrak{R}^N$ y sea $V : \mathfrak{R}^N \longrightarrow \mathfrak{R}$ una función de clase C^2 . Se denotará con

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$$

y D indicará el operador $\frac{d}{dt}$.

El producto interno en \mathfrak{R}^N se indicará por $X \cdot Y$, ó , $\langle X, Y \rangle$.

El problema que se propone consiste en extender un teorema de Lyapounov quien afirmó la existencia de soluciones periódicas de (1), cuando las razones λ_i/λ_j son números enteros, siendo λ_i, λ_j valores propios de la matriz Hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) = (V_{ij})$$

DEFINICIÓN. *Se dice que una función*

$$V : \mathfrak{R}^N \longrightarrow \mathfrak{R}$$

de clase C^2 es convexa en una vecindad de cero, si existe una vecindad de \mathfrak{A} tal que para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{A}$

$$V(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda V(x) + (1 - \lambda)V(y)$$

se dirá estrictamente convexa en \mathfrak{A} si

$$V(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda V(x) + (1 - \lambda)V(y).$$

AFIRMACIÓN. *Si $\nabla V(0) = 0$ y V es estrictamente convexa, entonces los valores propios de $(V_{ij}(x))$ son todos positivos*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la hipótesis que 0 es un punto crítico, más exactamente es un mínimo, por el criterio de la segunda derivada la matriz Hessiana (V_{ij}) es definida positiva, esto es

$$\langle x, (V_{ij}(x))x \rangle > 0, \quad x \in \mathfrak{A}$$

así los menores diagonales de (V_{ij}) son todos positivos y del análisis espectral se sigue que el espectro de (V_{ij}) está contenido en el semi-eje positivo de las x , de donde se sigue el resultado de la afirmación.

□

Siguiendo una sugerencia de Philip Hartmann [7] y usando argumentos de perturbación se demostrará que

"Si $\nabla V(0) = 0$ y V es convexa en una vecindad de cero, existe una solución periódica no trivial f para el problema

$$D^2 f + \nabla V(f) = 0 \quad "$$

2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN.

2.1. PRELIMINARES DEL CALCULO VARIACIONAL.

Diremos que una función es *admisibile*, si es una función de clase C^2 . Supongamos que existe una función admisible $y(x)$ que minimice la integral

$$(1) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx.$$

Nos preguntamos:

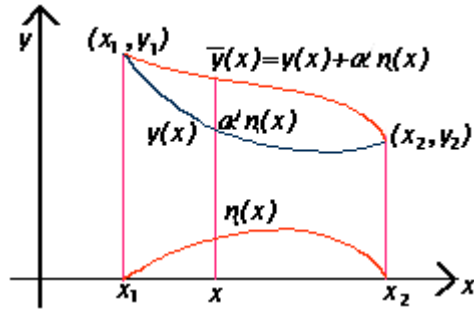
¿Cómo se puede encontrar esa función?. Se puede obtener mediante una ecuación diferencial para $y(x)$, comparando los valores de I que corresponden a funciones admisibles muy cercanas. La idea primordial es que, como $y(x)$ da un valor mínimo de I entonces I aumentará si se "perturba" ligeramente $y(x)$. Esas funciones transformadas se desarrollan como sigue: Sea $\eta(x)$ cualquier función con la propiedad de que $\eta''(x)$ es continua y

$$(2) \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Si α es un pequeño parámetro, entonces

$$(3) \quad \bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

representa una familia a un parámetro de funciones admisibles. La desviación vertical de una curva de esa familia, a partir de la curva de minimización $y(x)$ es $\alpha\eta(x)$, como se muestra en la figura.



La importancia de $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ se basa en el hecho de que, para cada familia de ese tipo, o sea, para cada elección de la función $\eta(x)$, la función de minimización $y(x)$ pertenece a la familia y corresponde al valor del parámetro $\alpha = 0$.

Ahora bien, con $\eta(x)$ fijo, se substituyen

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad \text{y} \quad \bar{y}'(x) = y'(x) + \alpha\eta'(x)$$

y se obtiene una función de α

$$(4) \quad \begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)] dx \end{aligned}$$

cuando $\alpha = 0$, la fórmula (3) da $\bar{y}(x) = y(x)$ y puesto que $y(x)$ minimiza la integral, se sabe que $I(\alpha)$ debe tener un valor mínimo cuando $\alpha = 0$. Por el cálculo elemental, una de las condiciones necesarias para esto es que anule la derivada $I'(\alpha)$ cuando $\alpha = 0$: $I'(0) = 0$, se denota

$$dI_y = \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \alpha\eta, y' + \alpha\eta'(x)) dx \right]_{\alpha=0}$$

y es llamada "primera variación de I en y ".

La derivada $I'(\alpha)$ puede calcularse derivada (4) bajo el signo integral, o sea

$$(5) \quad I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx.$$

Por la regla de la cadena para derivar funciones de varias variables, se tiene

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x).$$

Ahora bien, $I'(0) = 0$, de modo que, al hacer $\alpha = 0$ en (6) se tiene

$$(7) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0$$

En esta ecuación, la función $\eta(x)$ y su derivada $\eta'(x)$ aparecen simultáneamente y se puede eliminar $\eta'(x)$ integrando, el segundo término por partes obteniéndose

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx = \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

en virtud de (2). Por ende, se puede escribir (7) en la forma

$$(8) \quad \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0$$

Hasta este punto, nuestro razonamiento se basa en la elección de la función $\eta(x)$. No obstante, puesto que la integral en (8) debe anularse para *cada una* de esas funciones se llega inmediatamente a la conclusión de que la expresión entre paréntesis rectangular debe anularse. Esto da

$$(9) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \right] - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

que es conocida como ecuación de Euler-Lagrange.

Sea ahora M una variedad de dimensión N ; y $T(M)$ su espacio tangente, sea $Q : T(M) \longrightarrow \mathfrak{R}$ dada por $Q = Q(X, \dot{X})$ una función de clase C^2 en $2N$ variables y para cada función suficientemente suave 2π -periódica $f = f(t) : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}^N$, consideremos el funcional

$$E(f) = \int_0^{2\pi} Q(f(t), \dot{f}(t)) dt.$$

La "primera variación" del funcional E en f está dado entonces por

$$dE_f(w) = \left. \frac{d}{d\epsilon} E(f + \epsilon w) \right|_{\epsilon=0}$$

donde w es una aplicación 2π -periódica suficientemente suave y además tenemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} dE_f(w) &= \left[\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\epsilon} Q(f(t) + \epsilon w(t), \dot{f}(t) + \epsilon \dot{w}(t)) dt \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \left\langle \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \right), (w_i, \dot{w}_i) \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i + \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \dot{w}_i \right) dt. \end{aligned}$$

Integrando el segundo término por partes obtenemos

$$\begin{aligned} dE_f(w) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i dt + \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \dot{w}_i dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\partial Q}{\partial x_i} w_i dt - \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \right) w_i dt + \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} w_i \right]_0^{2\pi} = 0 \\ &= \left[\left\langle \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_N} \right), w \right\rangle \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] w_i dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$dE_f(w) = \int_0^{2\pi} \langle \nabla^0 E(f), w \rangle dt,$$

donde se ha denotado

$$(\nabla^0 E(f))_i = - \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right\}.$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el funcional E es por lo tanto dada por $\nabla^0 E(f) = 0$, y tenemos así la siguiente afirmación:

"Si cualquier función continua $Q(x, \dot{x})$ satisface la ecuación $Q_x - \frac{d}{dt} Q_{\dot{x}} = 0$, entonces se dice que cumple la Ecuación de Euler-Lagrange".

2.2.PROCEDIMIENTO SEGUIDO EN LA DEMOSTRACIÓN.

Se consideran los siguientes funcionales

$$E(f) = \int_0^{2\pi} V(f(t)) dt \quad \text{y} \quad J(f) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |Df|^2 dt.$$

Sea $c > 0$ un número fijo y sea $M_c = J^{-1}(c)$ la variedad imagen recíproca de un valor regular. Supongamos que existe una aplicación f que es un valor crítico de $E|_{M_c}$ por el método de los multiplicadores de Lagrange se debe tener

$$(1) \quad \nabla^0 E = \mu \nabla^0 J, \quad 0, \quad \nabla V(f) = -\mu D^2 f.$$

Es conveniente recordar aquí el siguiente resultado del análisis variacional:

"Si f es un punto crítico (máximo o mínimo) del funcional E sobre la variedad $M_c = J^{-1}(c)$ donde $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ entonces existe un funcional $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es un punto crítico del funcional $E - \mu \circ J$, es decir

$$d(E - \mu \circ J)_f = 0$$

lo cual implica que $dE_f = \mu dJ$."

Introduciendo el cambio de parámetro $t \rightarrow \sqrt{\mu}t$ en la ecuación (1) obtenemos la ecuación

$$D^2 f + \nabla V(f) = 0$$

teniendo el cuidado de que $\mu > 0$.

Seguimos así el siguiente procedimiento:

1. Definimos un cierto espacio de Hilbert (más exactamente un espacio de Sobolev)

$$H_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N / f \text{ es } 2\pi\text{-periódica y de clase } C^1\}$$

de manera que $J \in H_1$. El gradiente de E en H_1 estará dado por

$$\nabla^1 E = G \nabla^0 E$$

donde G es un cierto operador de Green.

2. Sea $\tilde{\nabla} E$ el gradiente de $E|_{M_c}$ donde $M_c \subset H_1$ y es dado por

$$M_c = \{f \in H_1 / J(f) = c\}.$$

Ahora sea $F_i(f) = \int_0^{2\pi} V_i(f(t)) dt$, entonces si f es un punto crítico de $E|_{M_c}$ se debe tener que $F_i(f) = 0$.

3. Se mostrará que si f_τ es una trayectoria de la ecuación

$$\frac{df_\tau}{d\tau} = \tilde{\nabla} E(f_\tau)$$

con una cierta condición inicial, entonces f_τ contiene un punto crítico f de E . Por lo tanto obtenemos que la ecuación de Euler-Lagrange tomará la forma

$$\nabla^1 E(f) = \mu_0 \nabla^1 J(f) + \mu_1 \nabla^1 F_1(f) + \dots + \mu_N \nabla^1 F_N(f).$$

se demostrará que $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_N = 0$ como una consecuencia de la convexidad de V . Por lo tanto

$$G(\nabla^0 E(f)) = \nabla^1 E(f) = \mu_0 \nabla^1 J(f) = G(\mu_0 \nabla^0 J(f))$$

de donde se sigue

$$\nabla^0 E(f) = \mu_0 \nabla^0 J(f)$$

o equivalentemente

$$\nabla V(f) = -\mu_0 D^2 f.$$

3. DEFINICIÓN DEL ESPACIO Y LOS OPERADORES USADOS.

Las funciones usadas a valor vectorial 2π -periódicas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ pueden identificarse con aplicaciones del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^N . Consideramos el espacio funcional $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^N)$, tenemos los siguientes productos internos en $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^N)$ dados por

$$(f, g)_0 = \int_0^{2\pi} \langle f(t), g(t) \rangle dt$$

$$(f, g)_1 = (Df, Dg)_0 + (f, g)_0 = ((1 - D^2)f, g)_0$$

y las normas dadas por

$$\|f\|_0^2 = (f, f)_0, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1, \quad \|f\|_{-1} = \sup\{(f, g)_0; \|g\|_1 = 1\}$$

se construyen así los siguientes espacios de Sobolev.

$$H_1 = \widehat{C^\infty(S^1, \mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_1}, \quad H_0 = \widehat{C^\infty(S^1, \mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_0}, \quad H_{-1} = \widehat{C^\infty(S^1, \mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{-1}}$$

teniéndose que

$$H_1 \subset H_0 \subset H_{-1}.$$

Además las aplicaciones canónicas

$$i_1 : H_1 \rightarrow H_0, \quad i_0 : H_0 \rightarrow H_{-1}$$

son completamente continuas. (ver [8]).

a. Por el teorema de Lax Milgram, como el producto interno $(\cdot, \cdot)_0$ es una forma bilineal en H_1 entonces existe un operador absolutamente continuo $G : H_1 \rightarrow H_1$ tal que $(f, g)_0 = (Gf, g)_1$, pues basta recordar el teorema de representación de Riez: sea $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, (F podría ser $(\cdot, \cdot)_0$), una aplicación lineal continua, entonces existe un único punto $g_0 \in H$ tal que $F(f) = \langle f, g_0 \rangle$ para todo $f \in H$; aquí sería si existe $h \in H_1$ tal que $(f, g)_0 = (h, g)_1$ entonces existe $G : H_1 \rightarrow H_1$ dada por $h = G(f)$.

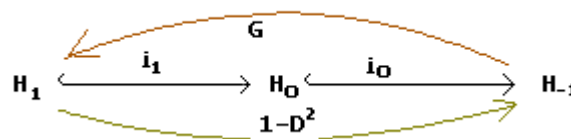
b. H_{-1} resulta ser un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$(f, g)_{-1} = (Gf, g)_0.$$

También H_{-1} es el dual de H_1 según el producto interno $(\cdot, \cdot)_0$, esto es si $l : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ existe $h_{-1} \in H_{-1}$ tal que

$$l(f) = (h_{-1}, f)_0 = (Gh_{-1}, f)_1.$$

c. $1 - D^2$ es un isomorfismo de H_1 sobre H_{-1} y G se extiende a un isomorfismo inverso de H_{-1} a H_1



Nótese que esta afirmación es debida a que

$$(f, g)_1 = ((1 - D^2)f, g)_0 = (G(1 - D^2)f, g)_1$$

de donde se concluye que

$$G(1 - D^2)f = f$$

para todo $f \in H_1$. Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} ((1 - D^2)Gf, g)_{-1} &= (G[(1 - D^2)Gf], g)_0 = (G[G(1 - D^2)(Gf)], g)_1 \\ &= (G(Gf), g)_1 = (Gf, g)_0 = (f, g)_{-1}. \end{aligned}$$

d. Sea E una función de clase C^1 en H_1 . El gradiente de E en f , $\nabla^1 E_f$ es un vector en H_1 definido por

$$(\nabla^1 E_f, g)_1 = dE_f(g).$$

Para f fijo, la aplicación

$$dE_f : H_1 \longrightarrow \mathfrak{R} \quad (g \longmapsto dE_f(g))$$

es una función lineal continua en H_1 , por ser H_{-1} el dual de H_1 se sigue de b. que existe $h_{-1} \in \nabla^0 E(f)$ tal que

$$dE_f(g) = (h_{-1}, g)_0 = (\nabla^0 E(f), g)_0 = (G\nabla^0 E(f), g)_1$$

entonces tenemos

$$\nabla^1 E(f) = G\nabla^0 E(f).$$

e. En la demostración se usarán las siguientes funciones en H_1

$$\begin{aligned} E : H_1 &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ f &\longmapsto E(f) = \int_0^{2\pi} V(f(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J : H_1 &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ f &\longmapsto J(f) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f'(t) \cdot f'(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i : H_1 &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ f &\longmapsto F_i(f) = \int_0^{2\pi} V_i(f(t)) dt \end{aligned}$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned} (i) dE(f)(g) &= \left(\frac{d}{d\epsilon} \int_0^{2\pi} V(f(t) + \epsilon g(t)) dt \right)_{\epsilon=0} = \left(\int_0^{2\pi} \frac{d(V(f(t) + \epsilon g(t)))}{d\epsilon} dt \right)_{\epsilon=0} = \\ &= \int_0^{2\pi} \{ \nabla^0 V(f(t) + \epsilon g(t)) \cdot g(t) \}_{\epsilon=0} dt = \int_0^{2\pi} \nabla^0 V(f(t)) \cdot g(t) dt = \\ &= (\nabla^0 V(f(t)), g(t))_0. \end{aligned}$$

Luego

$(G\nabla^0 E(f), g)_0 = (\nabla^1 E(f), g)_1 = (\nabla^0 V(f), g(t))_0$ para todo $g \in H_1$ entonces $G\nabla^0 E(f) = \nabla^0 V(f)$ y esto implica que $\nabla^1 E(f) = \nabla^0 V(f)$.

$$\begin{aligned} (ii) dJ_f(g) &= \left(\frac{d}{d\epsilon} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f'(t) + \epsilon g'(t)) \cdot (f'(t) + \epsilon g'(t)) dt \right)_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\epsilon} (f'(t) \cdot f'(t) + 2\epsilon f'(t) \cdot g'(t) + \epsilon^2 g'(t) \cdot g'(t)) dt \right)_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ 2f'(t) \cdot g'(t) + 2\epsilon g'(t) \cdot g'(t) \}_{\epsilon=0} dt = \int_0^{2\pi} f'(t) \cdot g'(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se tiene:

$$dJ_f(g) = f'(t)g(t) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t)g(t) dt = -(D^2 f, g)_0$$

entonces

$$\nabla^0 J(f) = -D^2 f.$$

Ahora $\nabla^1 J(f) = G\nabla^0 J(f)$, además se debe tener por c . que

$$G(1 - D^2)f = f,$$

o sea $Gf - G(D^2f) = f$ lo cual es equivalente a $Gf + G\nabla^0 J(f) = f$, entonces

$$\nabla^1 J(f) = G\nabla^0 J(f) = f - Gf.$$

(iii) Igualmente se tiene

$$(\nabla^0 F_i(f), X_j)_0 = (V_{ij}, X_j)_0, \text{ entonces } (\nabla^0 F_i(f))_j = V_{ij}(f).$$

En efecto

$$\begin{aligned} (\nabla^0 F_i(f), X_j)_0 &= dF_i(f)(X_j) = \left(\frac{d}{d\epsilon} \int_0^{2\pi} V_i(f(f) + \epsilon X_j) dt \right)_{\epsilon=0} = \\ &= \int_0^{2\pi} (V_{ij}(f(t) + \epsilon X_j) X_j)_{\epsilon=0} dt = \int_0^{2\pi} V_{ij}(f(t)) X_j(t) dt = (V_{ij}, X_j)_0. \end{aligned}$$

RESULTADO. Si $\nabla V(0) = 0$ y V es estrictamente convexa en una vecindad de cero, entonces existe una solución no trivial, periódica f para el problema

$$D^2 f + \nabla V(f) = 0$$

que está contenida en una vecindad de cero.

La demostración de este gran resultado será el objetivo de nuestro próximo aporte titulado "UN PROBLEMA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS", que saldrá en ciberespacio.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Castro, A., *Métodos Variacionales y Análisis Funcional no lineal*. X Coloquio Colombiano de Matemáticas. Paipa. 1980
- [2] Castro, A., *Métodos de Reducción vía Minimax*. Primer Seminario de Análisis. Medellín. 1981.
- [3] Clarke, F.H., *A new approach to Lagrange Multipliers Mathematic of Operations Research*. Mayo 1976
- [4] Chang, K-C., *Variational methods for Non-Differentiable functionals and their applications to partial Differential Equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1981.
- [5] D'Ambrosio, U., *Cálculo de Variaciones*. Monografías Elementales, Sociedad Colombiana de Matemáticas.
- [6] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York. 1964
- [7] Hartman, P., *On Stability in the Large for Systems of ordinary differential equations*. Canad. J. Math. 480-492. 1961.
- [8] Sánchez, H., D., *El Análisis Funcional en Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Seminario de Ecuaciones Diferenciales. U.N. 1984.

ДАЖИ ЛЛЮЮ

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciables.

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora y a la Ingeniera Esperanza Nieto quienes leyeron todos los originales y cuidaron del buen manejo del lenguaje español.

Éxitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,

danojuanos@tutopia.com

danojuanos@yahoo.com

Copyright© Darío Sánchez Hernández