ENSAYO DE UNA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

José Darío Sánchez Hernández
Bogotá –Colombia. junio - 2006
danojuanos@hotmail.com
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

El objeto de estas notas es brindar al lector un modelo de aprendizaje. A continuación encontrará más de cincuenta resultados básicos, entre los cuales se hallan definiciones, teoremas, corolarios y algunos ejemplos, es posible que encuentre la manera de volver a redactar algunos, por favor hágalo, de forma que los pueda recordar después. Para las demostraciones es indispensable el uso de una biblioteca con un buen número de textos de ecuaciones diferenciales parciales y análisis funcional, en esta forma el estudiante utiliza tácticas de investigación y empleará la biblioteca. Luego encontrará un resultado en donde se ha dado una posible demostración, la cual se supone es correcta, sin descartar la posibilidad de que haya algunos errores; el lector deberá revisarlas analizando cuál de los resultados básicos se ha utilizado en la prueba.

CONTENIDO

§0. RESULTADOS BÁSICOS

1. Sea $\Omega \subset \Re^N$ un dominio acotado. Sea H_0 el espacio de Hilbert real de las funciones con cuadrado real integrable, definido en Ω con el producto interno

$$\langle u,v\rangle_0 = \int_\Omega uv\,dx \qquad \text{para} \quad u,v \in H_0$$

Sea C^1 el espacio con producto interno de funciones reales continuamente diferenciables en $\overline{\Omega}$, donde el producto interno está dado por

$$\langle u,v\rangle_1 = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{N}(D_k u)(D_k v) + uv\right]dx$$

Sea H_1 el completado de C^1.

2. El espacio funcional de H_1 puede ser tomado como un subespacio de H_0, es decir existe un subespacio vectorial H_1 de H_0 tal que $C^1 \subset H_1$ y $\langle\cdot\rangle_1$ puede ser extendido de $C^1 \times C^1$ a $H_1 \times H_1$ tal que $(H_1, \langle\cdot\rangle_1)$ es un espacio de Hilbert con C^1 denso en H_1.

3. Si $\{w_n\}$ es una sucesión en C^1 tal que $|w_n|_0 \to 0$ cuando $n\to\infty$ y $\{w_k\}$ es una sucesión de Cauchy en C^1 entonces $|w_n|_1 \to 0$ cuando $n\to\infty$.
Puesto que

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial w_n}{\partial x_k} - \frac{\partial w_m}{\partial x_k}\right]^2 dx \le \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial w_n}{\partial x_k} - \frac{\partial w_m}{\partial x_k}\right]^2 + [w_n - w_m]^2\right)dx = |w_n - w_m|_1^2$$

Cada una de las sucesiones $\left\{\frac{\partial w_n}{\partial x_k}\right\}$, $k = 1,2,\ldots,N$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$

4. Sea $\overset{\circ}{C}{}^1$ el conjunto de funciones continuamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω. $\overset{\circ}{C}{}^1$ es un subespacio de C^1, además $\overset{\circ}{H}_1$ es la adherencia de $\overset{\circ}{C}{}^1$ en H_1.

5. (*Desigualdad de Poincare*). Sea $Q[u] = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$ para $u \in C^1$ y se extiende $Q[u]$ a H_1 por continuidad. Existe una constante $r_0 > 0$ tal que

$$r_0 |u|_0^2 \le Q[u] \qquad \text{para todo } u \in \overset{\circ}{H}_1$$

6. Sea $\{\varphi_k\} \subset \overset{\circ}{H}_1$ una sucesión acotada con respecto a la norma $|\cdot|_1$. Existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}$ de $\{\varphi_k\}$, que converge en H_0 con respecto a la norma $|\cdot|_0$

7. (*Desigualdad de Friederich*). Sea Ω un dominio acotado (abierto y conexo). Dado cualquier $\epsilon > 0$ existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in H_0(\Omega)$ tales que

(i) $(\varphi,\varphi) \le \sum_{k=1}^{n}(\varphi, w_k)^2 + \epsilon Q[\varphi]$ para todo $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$,

donde

$$(\varphi,\psi) = \int_\Omega \varphi\psi dx \qquad \varphi,\psi \in H_0(\Omega)$$

$$Q[\varphi] = \int_\Omega \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\varphi x_k}\right)^2 dx \quad \text{si } \varphi \in \overset{\circ}{C}_1$$

$Q[\cdot]$ es definido por continuidad en $\overset{\circ}{H}_1$

(ii) $\int\int_S \varphi^2 dxdy \le \left|\int\int_S \frac{\varphi}{s} dxdy\right|^2 + s^2 Q_S[\varphi]$

donde

$$S = \{(x,y); 0 \le x \le s,\ 0 \le y \le s\}$$

(iii) Sea $\{\varphi_k\}_1^\infty$ una sucesión en $\overset{\circ}{H}_1$ que es acotada con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces se tiene

$$(\varphi_k,\varphi_k)\leq A, \qquad Q[\varphi_k]\leq A$$

para alguna constante A.

8. (*Alterativa de Fredholm*). Sea E un espacio de Hilbert y $T:E\longrightarrow E$ un operador completamente continuo. T^* es completamente continuo, $\eta(I-T)$ es de dimensión finita y

(i) $\dim\eta(I-T)=\dim\eta(I-T^*)$

$R(I-T)$ es cerrado y

(ii) $R(I-T)=\eta(I-T^*)^\perp$

(iii) $R(I-T^*)=\eta(I-T)^\perp$

Si $\dim\eta(I-T)=\dim(I-T^*)=0$, $I-T$ es biyectivo, entonces $(I-T)^{-1}$ es acotado. Donde $\eta(I-T)$ es el nucleo de $I-T$, $R(I-T)$ el rango de $I-T$.

•. Sea $T:H\longrightarrow H$ un operador lineal y completamente continuo. Entonces T^* es completamente continuo.

•. Sea $T:H\longrightarrow H$ un operador lineal y completamente continuo, entonces $\eta(I-T)$ es de dimensión finita y

$$\dim\eta(I-T)=\dim\eta(I-T^*)$$

•. Sea $T:H\longrightarrow H$ un operador lineal y completamente continua, entonces $R(I-T)=\eta(I-T^*)^\perp$.

9. Sea $B(x,y)$ una forma bilineal definida en un espacio de Hilbert real H. Supóngase

(i) $B(x,y)\leq C_2\|x\|\|y\|$ para todo $x,y\in H$.

(ii) $B(x,x)\geq C_1\|x\|^2$, $\qquad C_1>0$, para todo $x,y\in H$

Sea L una función lineal continua en H. Existen aplicaciones lineales

$$T:H\longrightarrow H, \qquad S:H\longrightarrow H$$

tales que

$$B(Tx,y)=\langle x,y\rangle \quad \text{para todo } x,y\in H$$
$$B(y,Sx)=\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \quad \text{para todo } x,y\in H.$$

Además, T y S son biyecciones y $T^*=S$ $\quad (T^*=adjunto\,de\,T)$

•. (*Lax Milgram*). Sea B una forma bilineal definida en un espacio de Hilbert real H. Sea L una función lineal continua en H. Existen únicos elementos v y w en H tal que

$$B(v,\varphi)=L(\varphi)=B(\varphi,w) \quad \text{para todo } \varphi\in H.$$

10. *Ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden* de la forma

$$L[u]\equiv -D_ia^{ij}D_ju+b^iD_iu+cu=f$$

donde

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad a^{ij},b^i,c \text{ son funciones acotadas y medibles en } \Omega,$$

siendo Ω un dominio de $\Re^N$.

•. L es *elíptico* si

$(I)\quad a^{ij}(x)\epsilon_i\epsilon_j > 0$ salvo para $\epsilon_j = 0,\ j = 1,2,\ldots,N$

•. L es un operador fuertemente elíptico si

$(II)\quad a^{ij}(x)\epsilon_i\epsilon_j \geq a_0\left(\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i^2\right)$

•. Se considera la ecuación $Lu = F$ y supóngase que a^{ij}, b^i son reales, continuas y de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, c medible y acotada, $F \in L^2(\Omega)$, c, F reales.

•. φ es una ***solución*** de prueba si $\varphi \in C^2(\Re^N)$ y φ tiene soporte compacto contenido en Ω.

•. Integrando por partes a $Lu = F$ se produce

$\int_\Omega \varphi Lu dx = \int_\Omega [a^{ij}(D_j u)(D_i\varphi) + \varphi b^i D_i u + \varphi c u]dx = \int uL^*\varphi dx$

donde

$L^*\varphi = -D_j a^{ij} D_i\varphi - D_i(b^i\varphi) + c\varphi$

L^* es llamado el "*adjunto formal*" de L.

•. La anterior ecuación puede ser escrita en la forma

$(III)\ (Lu,\varphi) = B(u,\varphi) = (u, L^*\varphi)$

donde

$B(u,\varphi) \equiv \int_\Omega [a^{ij}(D_i\varphi)(D_j u) + b^i\varphi D_i u + c\varphi u]dx$

y

$(u,w)) = \int_\Omega uwdx$ para $u,w \in L^2(\Omega)$ (reales)

•. Si $b^i = 0,\ i = 1,2,\ldots,N$ y $a^{ij} = a^{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n$ entonces $L\varphi = L^*\varphi$ y L se dice ser formalmente *auto-adjunto.*

•. B es un funcional bilineal entre u y v y $B(u,\varphi) = B(\varphi,u)$ si L es auto-adjunto.

11. Supóngase $a^{ij}, b^j \in C^1(\overline{\Omega})$ y $c, f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in L^2(\Omega)$, u es una *solución débil* de

$(1)\qquad Lu = f$

si para toda función de prueba φ

$(IV)\ (u, L^*\varphi) = (f,\varphi)$

u es una *solución débil* de

$(1^*)\ \ L^*u = f$

si para toda función de prueba φ

$(IV^*)\ (L\varphi, u) = (\varphi, f)$

•. Suponiendo que a^{ij}, b^i y c son puramente medibles y acotados en Ω, puesto que la forma bilineal B es acotada en $C^1 \times C^1$ entonces puede extenderse por continuidad a $H_1 \times H_1$.

12. $u \in H_1$ es una *solución débil* de (1) si para todo $\varphi \in \mathring{H}_1$

$(IV')\ B(u,\varphi) = (f,\varphi)$

u es *solución débil* de (1^*) si

$(IV')^{*}\ B(\varphi,u)=(\varphi,f)$ para todo $\varphi\in\overset{\circ}{H}_1$

•. Si $a^{ij},b^{j}\in C^{1}(\Omega)$ entonces las definiciones 11 y 12 son equivalentes

13. Sea $\Omega\subset\Re^{N}$, un dominio acotado, $0<\alpha<1$. $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ denotará al conjunto de todas las funciones u definidas en $\overline{\Omega}$ tales que

$$\overline{H}_{\alpha}(u)=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<\infty$$

Tomando $\|u\|_{\alpha}=\sup\limits_{\overline{\Omega}}|u(x)|+\overline{H}_{\alpha}(u)$, $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\alpha}$

14. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y existe una función de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ en $\mathbb{C}$ denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\left(\langle\cdot,\cdot\rangle:\begin{array}{l}\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{C}\\ (f,g)\mapsto\langle f,g\rangle\end{array}\right)$ tal que

(a) $\langle f,f\rangle\geq 0$ para todo $f\in\mathbb{E}$ y $\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow f=0$

(b) $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$ para todo $f,g\in\mathbb{E}$

(c) Si $f,g,h\in\mathbb{E}$ entonces $\langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$

(d) Si $\alpha\in\mathbb{C}$, $f,g\in\mathbb{E}$, $\langle\alpha f,g\rangle=\alpha\langle f,g\rangle\wedge\langle f,\alpha g\rangle=\overline{\alpha}\langle f,g\rangle$

•. $A:\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{C}$ se le denomina producto interno positivamente definido. Se define $(\langle f,f\rangle)^{\frac{1}{2}}=\|f\|$

•. Si $f,g\in\mathbb{E}$, $\|f+g\|^{2}+\|f-g\|^{2}=2\left(\|f\|^{2}+\|g\|^{2}\right)$

•. Si $f,g\in\mathbb{E}$, $|\langle f,g\rangle|\leq\|f\|\|g\|$

• Si $f,g\in\mathbb{E}$ entonces $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

•. $\|\cdot\|=(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{\frac{1}{2}}$ es una norma sobre $\mathbb{E}$

15. Si $\left(\mathbb{E}.\|\cdot\|=(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{\frac{1}{2}}\right)$ es un espacio de Banach, en este caso a $\mathbb{E}$ se le denomina espacio de Hilbert y se le denota con $\mathcal{H}$.

Se dice que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, si $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial normado y completo como espacio métrico.

•. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $f,g\in\mathcal{H}$ si $\langle f,g\rangle=0$, entonces se dice que f y g son ortogonales (o perpendiculares).

•. Si $S\subset\mathcal{H}$ se denota por $S^{\perp}=\{f\in\mathcal{H}/\langle f,g\rangle=0$ para todo $g\in S\}$ y es llamado el complemento ortogonal de S.

•. $S^{\perp}$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H}$. (Esto es claro ya que $\langle f+g,h\rangle=\langle f,h\rangle+\alpha\langle g,h\rangle=0,\ \forall h\in S\ \Leftrightarrow f,g\in S^{\perp}$).

•. Si $\mathcal{M}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ y $f\in\mathcal{H}$ entonces existe un único elemento $g\in\mathcal{M}$, tal que

$\|f-g\|<\|f-g'\|$ para todo $g'\in M, g'\neq g$.

•. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado en $\mathcal{H}$ y $f\in\mathcal{H}$ entonces existe un único elemento $g\in\mathcal{H}$ tal que

$dist(\mathcal{M},f)=\|f-g\|<\|f-g'\|$ para todo $g'\in\mathcal{M}$, $g'\neq g$

16. Si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado entonces $\mathcal{M}^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

•. $\mathcal{H}=\mathcal{M}\bigoplus\mathcal{M}^{\perp}$

•. Si $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ y $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=\delta_{n,m}$ en este caso se dice que K es un conjunto ***ortonormal***

17. Si $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$ entonces

(i) $\sum\limits_{n=1}^{m}|\langle f,\varphi\rangle|^2\leq\|f\|^2$ (desigualdad de Bessel)

(ii) Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $\mathbb{C}$ entonces

$\left\|\sum\limits_{n=1}^{m}\alpha_n\varphi_n-f\right\|\geq\left\|\sum\limits_{n=1}^{m}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n-f\right\|$ para todo entero positivo m

18. Si $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$ y además $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos, entonces se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$ converge si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ converge.

En el caso de tener la convergencia se tiene

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n\right\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right\|^2$$

•. Si $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$

(i) $f\in[K]^{\perp}=\{$combinaciones lineales de $K\}^{\perp}$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n=0$

(ii) $f\in\overline{[K]}$ entonces $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$

19. Si $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal; a K se le denomina base ortogonal de $\mathcal{H}$

•. $K=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal si y sólo si $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\langle f,\varphi_n\rangle|^2$

20. Supongamos que $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios vectoriales. Si Ω es un subespacio de $\mathbb{E}$ y $T:\Omega\longrightarrow\mathbb{F}$ es una función tal que

$$T(\alpha f+\beta g)=\alpha T(f)+\beta T(g)$$

para todo $\alpha,\beta\in\Re$(o $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$), y para todo $f,g\in\Omega$, en este caso a T se le denomina un operador lineal de $\mathbb{E}$ a $\mathbb{F}$.

•. Se denota por $\Omega(T)=\Omega=$ "al dominio de T"

•. $R(T)=T(\Omega)=\{T(f)/f\in\Omega\}=$ "recorrido de T"

•. $N(T)=\{f\in\Omega/T(f)=0\}=$ "subespacio nulo de T o núcleo"

21. Supóngase que $k:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\Re$ es un operador lineal. Se define

$$K:C([a,b])\longrightarrow C([a,b])$$

como $K[f](x)=\int_a^b k(x,y)f(y)dy$. La norma de $C([a,b])$ se le denota $\|\cdot\|_\infty$ y con esta norma K es un operador tal que para $g\in C([a,b])$ es posible hallar $f\in C([a,b])$ tal que $K[f](x)=g$.
A este operador se le llama ***operador de Fredholm.***

22. En lo que sigue $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach. Sea $T:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ un operador lineal, si existe un número real $m>0$ tal que

$$\|T(f)\|_{\mathbb{F}}\le m\|f\|_{\mathbb{E}} \quad \text{para todo } f\in\Omega(T)$$

entonces se dice que T es un operador acotado en $\Omega(T)$.

•. Si T es acotado, se define $\|T\|=\inf\{m/\|T(f)\|_{\mathbb{F}}\le m\|f\|_{\mathbb{E}},\forall f\in\Omega(T)\}$ como la norma de operador T.

•. Ahora consideremos $k:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\Re$ continua y

$$K:C([a,b])\longrightarrow C([a,b])$$
$$f\mapsto K[f], K[f](x)=\int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

En $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ tenemos

$$|K[f](x)|=\left|\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right|\le\int_a^b|k(x,t)|\|f(y)\|dy$$
$$\le\sup_{x,y\in[a,b]}|k(x,y)|\int_a^b|f(y)|dy\le\sup_{x,y\in[a,b]}|k(x,y)|(b-a)\|f\|_0=m\|f\|_0$$

teniéndose $\|K[f]\|_\infty\le m\|f\|_\infty$. Luego el operador K es acotado.

23.En $C^{2+\alpha}(\Omega)=\{u\in C^2(\Omega)/u,u_i,u_{x_ix_j}\in C^\alpha(\Omega),\forall i,j,1\le i,j\le N,0<\alpha<1\}$ se define $\|u\|_{2+\alpha}=\|u\|_\alpha+\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_\alpha+\sum_{i,j=1}^N\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_\alpha$, en estas condiciones $C^{2+\alpha}(\Omega)$ es un espacio vectorial normado. Si se toma

$$L:\dot{C}^{2+\alpha}(\Omega)\longrightarrow C^\alpha(\Omega)$$
$$u\longmapsto L[u]=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^N b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu$$

se sigue que L es acotado. Además si L es elíptico entonces L es uno a uno.
Donde $\dot{C}^{2+\alpha}(\Omega)=\left\{f\in C^{2+\alpha}(\Omega)/f\Big|_{\partial\Omega}\equiv 0\right\}$

24. Sea $T:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ un operador lineal. T es un operador acotado en $\Omega(T)$ si y sólo si T es continuo.
Recuerde que con $\Omega(T)$ indicamos el dominio de T

•. Consideremos el espacio $(C^1([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ el operador

$$M:C^1([a,b])\longrightarrow C([a,b])$$
$$f\mapsto f'$$

no es continuo, basta tomar operadores cerrados como los dados por la sucesión $\{\sin nt\}_{n=1}^\infty$

•. (*Función abierta*). Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach y $L:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ es un operador lineal, continuo y sobreyectivo entonces $(L$ es abierto$)$ $\forall G$ abierto en $\mathbb{E}$ se tiene que $L(G)$ es abierto en $\mathbb{F}$.

•. Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach y $L:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ es un operador lineal acotado y L es una biyección, entonces $L^{-1}:\mathbb{F}\longrightarrow\mathbb{E}$ es también un operador lineal acotado.

25. Supongamos que $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach, denotemos por

$$\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})=\{M:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}/M \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

Si $\mathbb{E}=\mathbb{F}$, entonces $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})=\mathcal{L}(\mathbb{F})$

•.$(\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}),\|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\|$ es la norma de los operadores acotados, es un espacio de Banach.

Si $M\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ entonces $\|M\|=\sup\limits_{\substack{f\in\mathbb{E}\\ \|f\|=1}}\|M(x)\|_{\mathbb{F}}\geq 0$

•. Observemos la ecuación de la forma

$$f(x)-\int_0^1 k(x,y)f(y)dy=g(y) \qquad (1)$$

donde $k:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\Re$ es continua. Supongamos que se tiene el siguiente problema: Dado $g\in C([0,1])$, se desea determinar f tal que satisfaga la siguiente implicación: "si $T[f](x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ es un operador lineal entonces el problema (1) tendrá la forma $(I-T)f\equiv g$". Si se desea que una tal f exista, esto se tendrá cuando $(I-T)$ sea un operador invertible.

26. Supongamos que $T:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{F}$ el lineal acotado, donde $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach y $T\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$. Si $\|T\|_{\mathbb{E}}=1$ entonces $(I-T)^{-1}$ existe y $(I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$; en ese caso se dice que $I-T$ es invertible.

•. Supongamos que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach y $L_0,L,L_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$. Si $\|L-L_0\|\|L_0^{-1}\|<1$ entonces $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$ (es decir, L es invertible)

27. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach, y $T:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}$ un operador lineal (T no es necesariamente acotado), entonces al conjunto

$$\rho(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}/(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{E})\right\}$$

se le denomia conjunto ***resolvente*** de T. Al complemento $\sigma(T)$ de $\rho(T)$ en $\mathbb{C}$ $(\sigma(T)=\mathbb{C}-\rho(T))$ se le denomina ***el espectro*** de T.

•. Si $\lambda\in\rho(T)$ se denota por $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$

$$\begin{aligned} R(\,\cdot\,,T):\rho(T)&\longrightarrow\mathcal{L}(Eb)\\ \lambda&\longmapsto(\lambda I-T)^{-1}\end{aligned}$$

$R(T)$ se le denomina el resolvente de T.

•. Puede suceder que T no sea inversible, pero que exista λ tal que $\lambda I-T$ sea invertible, porque $\lambda I-T=\lambda\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)$ y λ se toma tal que $\|\frac{T}{\lambda}\|<1$.

•. Sea T un operador lineal acotado, que efectúa una transformación biunívoca del espacio de Banach $\mathbb{E}$ sobre el espacio de Banach $\mathbb{F}$. Entonces el operador inverso T^{-1} es acotado.

28. Si $T\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$, entonces $\lambda\in\rho(T)$ si y sólo si $(\lambda I-T)$ es una biyección.

•. $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda I - T) \text{ no es } 1 \text{ a } 1 \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{E} \text{ tal que } (\lambda I - T)(f) = 0, f \neq 0 \\ \text{o} \qquad\qquad \exists f \neq 0 \text{ tal que } T(f) = \lambda f \\ (\lambda I - T) \text{ no es sobre} \end{cases}$

•. $\sigma(T) \subset \overline{B}_{\|T\|}(0) = \{\lambda \in \mathbb{C}/|\lambda| \leq \|T\|\}$ porque $\lambda I - T = \lambda\big(I - \frac{T}{\lambda}\big)$ y es inversible si y sólo si $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1 \Leftrightarrow \|T\| \leq |\lambda|$.

•. Se considera que $\sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ es el radio del espectro de T.

•. Supongamos que $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es una aplicación lineal y $\mathbb{E}$ un espacio de Banach. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda,T) - R(\lambda_0,T)}{\lambda - \lambda_0}$ existe, en este caso se dice que $R(\,\cdot\,, T)$ es analítica en λ_0.

29. Si T es un operador lineal acotada esto es $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ entonces

(i) $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda I - T)$ es invertible$\}$, es abierto

(ii) $R(\,\cdot\,, T) : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E})$ es una función analítica.

$$\lambda \mapsto R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

•. Si $\mathbb{E} \neq \{ø\}$ y si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ entonces $\sigma(T)$ no es vacío.

•. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ y $\gamma_\sigma(T) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ entonces

$$\gamma_\sigma(T) = \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (\gamma_\sigma(T) \leq \|T\|)$$

30. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, la serie $\lambda^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n$ es tal que

(i) converge si $|\lambda| > \gamma_\sigma(T)$

(ii) diverge si $|\lambda| < \gamma_\sigma(T)$.

•. $\gamma_\sigma(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \sup \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

•. $\gamma_\sigma(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \Big(\leq \Big(\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|\Big)\Big)$

•. Debe tenerse que $\gamma_\sigma(T) \neq \|T\|$ y se puede demostrar que $\gamma_\sigma(T) < \|T\|$

31.(T***eorema de Hann-Banach***) Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach real y $\mathbb{M}$ un subespacio de $\mathbb{B}$. Sea F un funcional lineal acotado sobre $\mathbb{M}$ $(F : \mathbb{M} \longrightarrow \Re)$ con norma $\|F\|_{\mathbb{M}}$. Entonces existe un funcional lineal acotado $G : \mathbb{B} \longrightarrow \Re$ tal que

(a) $Gf = Ff$, para cada $f \in \mathbb{M}$

(b) $\|G\| = \|F\|_{\mathbb{M}}$

En otras palabras G es una extensión de F a $\mathbb{B}$, sin aumento en la norma.

32. Sea B un espacio de Banach real, $\mathbb{M}$ un subespacio de $\mathbb{B}$. Sea F un funcional lineal acotado sobre $\mathbb{M}$ con norma $\|F\|_{\mathbb{M}}$. Sea $g \in \mathbb{B}$, $g \neq 0$ y $g \notin \mathbb{M}$. Si

$$\mathbb{N} = \{f + \alpha g / f \in \mathbb{M}, \alpha \in K\}$$

Entonces existe un funcional lineal G acotado $G : \mathbb{N} \longrightarrow \Re$ tal que

(a) $Gf = Ff$, para todo $f \in \mathbb{N}$

(b) $\|G\|_{\mathbb{N}} = \|F\|_{\mathbb{N}}$.

33. Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y sea $f \neq 0$ en $\mathbb{B}$. Existe un $F \in \mathbb{B}^*$, $F \neq 0$ tal que $Ff = \|F\|\|f\|$ entonces $Ff = |Ff|$

•. Si $\mathbb{B} \neq \{0\}$ existen funciones lineales acotadas $F \neq 0, F \in \mathbb{B}^*$ tales que para $f, g \in \mathbb{B}$, $f \neq g$, $Ff \neq Fg$

•. Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathbb{E}^* = \mathcal{L}(\mathbb{E}, \Re)$ es un espacio de Banach.

•. Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach y $f \in \mathbb{E}$ entonces existe $f^* \in \mathbb{E}^*$ tal que $f^*(f) = \|f\|$ y $\|f^*\| = 1$.

•. Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach y $f \in \mathbb{E}$, además $f^*(f) = 0,$ para todo $f^* \in \mathbb{E}^*$ entonces se tiene que $f \equiv 0$.

34. Supóngase que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach. Si $f \in \mathbb{E}$, entonces

$$\|f\| = \sup_{\substack{f^* \in \mathbb{E}^* \\ \|f^*\| = 1}} |f^*(f)|$$

35. Supongamos que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach. Si $f^* \in \mathbb{E}^*$ y $g \in \mathbb{E}$ denotaremos por

$$\langle f^*, g \rangle = f^*(g)$$

•. Si $\alpha, \beta \in \Re$, $f^*, g^* \in \mathbb{E}^*, f, g \in \mathbb{E}$ se tiene

(i) $\langle f^*, \alpha f + \beta g \rangle = \alpha \langle f^*, f \rangle + \beta \langle f^*, g \rangle$

(ii) $\langle \alpha f^* + \beta g^*, f \rangle = \alpha \langle f^*, f \rangle + \beta \langle g^*, f \rangle$

(iii) $|\langle f^*, f \rangle| \leq \|f^*\|\|f\|$

(iv) Si $\langle h^*, f \rangle = 0$ para todo $h^* \in \mathbb{E}^*$ entonces $f = 0$

36. Supongamos que $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son dos espacios de Banach y $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ (operador lineal acotado), se define $L^* : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$. Si $f^* \in \mathbb{F}^*$ entonces

$$L^*(f^*) = f^*(L(f)) \qquad \text{para todo } f \in \mathbb{E}$$

y L^* es lineal.

•. Si $f^*, g^* \in \mathbb{F}^*$, entonces $f^* + g^* = (f+g)^*$

•. L^* es un operador acotado, llamado operador ***adjunto*** de L.

37. Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach y $L : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es un operador lineal $L^* : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*$ es el operador lineal adjunto, entonces

$$\|L^*\| = \|L\|$$

de donde sale la acotación de L^*.

•. Por ejemplo en el caso del Laplaciano $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ tomando $\Delta : \dot{C}^{2+\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^{\alpha}(\Omega)$ se puede demostrar, integrando por partes que

$$\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} u \Delta v = \langle u, \Delta v \rangle.$$

•. Supóngase que $S \subset \mathbb{E}$ donde $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, se denota por

$$S^{\perp} = \{f^* \in \mathbb{E}^* / \langle f^*, f\rangle = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

Si $S^* \subset \mathbb{E}^*$ se simboliza por

$$(S^*)^{\perp} = \{f \in \mathbb{E} / \langle f^*, f\rangle = 0 \text{ para todo } f^* \in S^*\}$$

38. Supóngase que $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach, entonces si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ tenemos

(i) Si $R(T)$ es el recorrido de T, entonces $\overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$

(ii) Si $R(T)$ es cerrado entonces $R(T^*)$ también lo es, y además

$$R(T^*) = N(T)^{\perp}$$

•. Supongamos que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach. Si la bola cerrada unitaria

$$\overline{D} = \{f \in \mathbb{E} / \|f\| \leq 1\}$$

es compacta, entonces $\mathbb{E}$ es de dimensión finita.

•. Supongamos que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach. Si $\mathcal{M} \neq \mathbb{E}$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{E}$, $0 < \epsilon < 1$ entonces existe un elemento $f \in \mathbb{E} - \mathcal{M}$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|f - g\| \geq 1 - \epsilon$ para todo $g \in \mathcal{M}$.
(Vea una demostración muy interesante de este resultado en el Análisis II de S. Lang) .

39. Supóngase que $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son espacios de Banach y $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es un operador lineal, entonces si para toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{E}$, entonces $\|f_n\|_{\mathbb{E}} \leq r$, para algún $r > 0$ y para todo $n \geq 1$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{T(f_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{F}$, en este caso decimos que T es un operador lineal ***compacto*** .

•. Supongamos que $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach. Si $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador lineal compacto $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ entonces $N(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.

•. Si $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador compacto entonces $T^* : \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*$ es un operador lineal compacto.

40. Si $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador lineal compacto y $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ entonces $R(\lambda I - T)$, $R(\lambda I - T^*)$ son subespacios cerrados en $\mathbb{E}$.

•. (i) $R(\lambda I - T) = N(\lambda I - T^*)^{\perp}$

(ii) $R(\lambda I - T^*) = N(\lambda I - T)^{\perp}$

•. Si $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador lineal compacto y $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, entonces existe un entero positivo n tal que

$$N((\lambda I - T)^n) = N\left((\lambda I - T)^{n+1}\right)$$

41. (*Alternativa de Fredholm*). Supóngase que $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador compacto y $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, $(\lambda I - T)$ es sobre si y sólo si $(\lambda I - T)$ es uno a uno.

•. Si Ω es un dominio acotado en $\Re^N$ y $0 < \alpha < \beta < 1$ entonces la inyección

$$i : C^{\beta}\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow C^{\alpha}(\Omega)$$
$$u \longmapsto i(u) = u$$

es una aplicación lineal compacta.

______________________________.

En la demostración de esta afirmación se destaca la siguiente desigualdad

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}}|x-y|^{\beta-\alpha} \leq \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}} \cdot (di\acute{a}metro\, de\, \Omega)^{\beta-\alpha}$$

42. Supóngase que Ω es una región en $\Re^N$ para $0<\alpha<1$, se dice que $\partial\Omega$ es de clase $C^{2+\alpha}$ si para todo $p \in \partial\Omega$ existe un abierto G en $\Re^N$ y un abierto V en $\Re^{n-1}$ tal que $p \in G$ existe un entero $1 \leq k \leq N$ y una función $h \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ tal que

$\partial\Omega \cap G=$

$$\left\{(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_N)/(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_N) \in V \text{ y } x_k = h(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_N)\right\}$$

43. (***Teorema de Schauder***) Si Ω es una región en $\Re^N$, $\partial\Omega$ es de clase $C^{2+\alpha}$, Ω es acotado

$$L[u] = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \text{ para todo } u \in C^2(\Omega)$$

L es uniformemente elíptico, $a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ y $c \leq 0$; entonces existe una constante $\overline{k}_1 > 0$ tal que para todo $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, el siguiente problema

$$(I)\begin{cases} L[u] \equiv f & \text{en } \Omega \\ u \equiv 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución en $C^{2+\alpha}$; y además

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq \overline{k}_1 \|f\|_{\alpha}$$

•. Tomando

$$\dot{C}^{2+\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^{2+\alpha}(\Omega)/u\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0\right\}$$

se obtiene claramente un espacio de Banach cerrado.

•. Considerando el operador

$$L : \dot{C}^{2+\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$$
$$u \longmapsto L[u]$$

lo que dice el teorema de Schauder es que L es un operador uno a uno y sobre (es decir, L es una biyección)

•. Por las definiciones resulta que L es uno a uno ya que si $L[u]=0$, entonces por el principio del máximo $u=0$. Así

$$L^{-1} : C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow C^{2+\alpha}(\Omega)$$

es acotado y

$$\|L^{-1}(f)\|_{2+\alpha} \leq \|L^{-1}\|\|f\|.$$

44.(*Desigualdad de Sobolev* para $0<\alpha<1$). Si se toman las condiciones del teorema de Schauder y p es suficientemente grande tal que

(a) $\alpha + \frac{N}{p} < 1$ entonces existe una constante $c = c(p, L, \Omega)$ tal que

$$\|u\|_{1+\alpha} \leq c\|u\|_{2,p}$$

(b) $\|u\|_{2,p} \leq c\|f\|_{\alpha}$

$(c) \quad \|u\|_{1+\alpha} \leq k_2 \|f\|_\alpha$

También se tiene que

$$\|u\|_{1+\alpha} \leq c\|f\|_\infty \leq c\|f\|_\alpha$$

En general se tiene que

$$\|u\|_{1+\alpha} \leq c_0\|u\|_{2,p} \leq cc_1\|f\|_\alpha$$

•. La inyección $\begin{array}{l} i : C^{2+\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \\ \quad u \longmapsto i(u) = u \end{array}$ es compacta.

•. Considérese la siguiente composición:

$$C^\alpha(\overline{\Omega}) \xrightarrow{L^{-1}} \dot{C}^{2+\alpha}(\Omega) \xrightarrow{i} C^\alpha(\overline{\Omega})$$

tomando $R = L^{-1}, T = i \circ R : C^\alpha(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$, entonces se tiene que T es un operador compacto.

45. Supóngase que Ω es un dominio de $\Re^N$ acotado

$$L[u] = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \text{ para todo } u \in C^2(\Omega)$$

$a_{ij}, b_i, c \in C^2(\overline{\Omega})$, se tiene que el operador L es uniformemente elíptico además $\partial\Omega$ es de clase $C^{2+\alpha}$. Si $L : \dot{C}^{2+\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$ es uno a uno donde

$$\dot{C}^{2+\alpha} = \left\{ u \in C^{2+\alpha} / u\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \right\}$$

entonces el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} L[u] = g \text{ en } \Omega \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\}$$

tiene una solución única $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ para cada $g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, además existe una constante $k_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq k_2 \|L[u]\|_\alpha, \qquad \forall u \in C^{2+\alpha}(\Omega).$$

•. Este es el mismo teorema de Schauder donde se ha cambiado la condición $c \leq 0$, por L, es uno a uno.

•. En resumen se considera el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^\alpha(\Omega) \arrow[rr, "N^{-1}"] \arrow[dr, "T"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & C^{2+\alpha}(\Omega) \arrow[dl, "i"] \\ & C^\alpha(\Omega) & \end{tikzcd}$$

Se toma $N[u] = L[u] - du \qquad c(x) - d \leq 0$

Así $L[u] \equiv f$ es equivalente a $u + dT(u) = T(f)$ de donde

$$u - Ku = T(f) \wedge K = -dT \Leftrightarrow (I - K)(u) = T(f).$$

•. Supóngase ahora que Ω es un dominio acotado en $\Re^N$, $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$, $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $0 < \alpha < 1$

$$L[u] = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \text{ para todo } u \in C^2(\Omega)$$

L es uniformemente elíptico y

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \Re &\longrightarrow \Re \\ (x,s) &\longmapsto f(x,s) \end{aligned}$$

es una función de clase C^1 en $\overline{\Omega} \times \Re$.
Consideramos el siguiente problema

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} L[u](x) = -[f(x,u(x)) + h(x)] \quad \text{en } \Omega \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\}$$

donde $h \in C^{\alpha}(\Omega)$

46. Una función $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ se denomina ***supersolución*** (o solución superior) del problema (I) si

$$L[v](x) \leq -[f(x,v(x)) + h(x)]$$

en Ω, $v(x) \geq 0$ en $\partial\Omega$.
Si una función $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{l} L[w](x) \geq -[f(x,w(x)) + h(x)] \quad \text{en } \Omega \\ \qquad w(x) \leq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

en este caso a w se le denomina ***subsolución*** del problema (I)

47. Si existen dos funciones v y w tales que v es una supersolución de (I), w una subsolución de (I) y $w(x) \leq v(x)$ en $\overline{\Omega}$ entonces existe $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que u es solución de (I) y $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$ en $\overline{\Omega}$.

DEMOSTRACIÓN: Dada la importacia de este resultado en todo lo que sigue se dará la prueba como un ejercicio.
Se selecciona $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma + \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} > 0 \text{ para todo } x \in \Omega$$

y

$$w(x) \leq s \leq v(x) \quad \text{y} \quad -\gamma + c(x) \leq 0 \quad \text{en } \Omega$$

Se define $M[u] \equiv L[u] - \gamma u$ para todo $u \in C^2(\Omega)$. Por el teorema de existencia de Schauder existe una función $u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} M[u_0] = -[f(x,w(x)) + h(x) + \gamma w(x)] \text{ en } \Omega \\ \quad u_0 \equiv 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Por el mismo teorema existe $u_1 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} M[u_1] \equiv -[f(x,u_0(x)) + h(x) + \gamma u_0(x)] \text{ en } \Omega \\ \quad u_1 \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Usando inducción podemos asegurar que existe una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $C^{2+\alpha}(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} M[u_m] \equiv -[f(x,u_{m-1}(x)) + h(x) + \gamma u_{m-1}(x)] \text{ en } \Omega \\ \quad u_m \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

para todo $m = 1, 2, \ldots$
Demostraremos a continuación que

$$w(x) \leq u_m(x) \leq u_{m+1} \leq v(x) \text{ para todo } x \in \Omega$$

Para ver esto recordemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} M(w(x)) \geq -[f(x,w(x)) + h(x) + \gamma w(x)] \text{ en } \Omega \\ \qquad w(x) \leq 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Además tenemos

$$(*) \quad \begin{cases} M[u_0](x) = -[f(x,w(x)) + h(x) + \gamma w(x)] \text{ en } \Omega \\ u_0 = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Restando tenemos

$$\begin{cases} M[w - u_0](x) \geq 0 \text{ en } \Omega \\ w - u_0 \leq 0 \quad \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por el principio del máximo débil $w - u_0 \leq 0$ en $\overline{\Omega}$ esto es

$$w(x) \leq u_0(x) \text{ en } \overline{\Omega}$$

Además tenemos

$$\begin{cases} M[v](x) \leq -[f(x,v(x)) + \gamma v(x) + h(x)] \text{ en } \Omega \\ v\Big|_{\partial\Omega} \geq 0 \end{cases}$$

Restando esta última con $(*)$ tenemos

$$M[u_0 - v](x) \geq f(x,v(x)) - f(x,w(x)) + \gamma[v(x) - w(x)] \overset{(1)}{=}$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi(x)) + \gamma\right)(v(x) - w(x)) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

y $\quad (u_0 - v)\Big|_{\partial\Omega} \leq 0$

________________.

(1)Aplicando el teorema del valor medio

________________.

Otra vez por el principio del máximo débil y las anteriores desigualdades podemos concluir que

$$u_0(x) \leq v(x) \qquad \text{en } \overline{\Omega}$$

suponiendo que $w < u_k \leq u_{k+1} \leq v$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Las otras desigualdades se demuestran en la misma forma. Por lo anterior podemos concluir que

$$w(x) \leq u_n(x) \leq u_{n+1} \leq v(x)$$

para todo entero positivo n. Por lo tanto el $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ existe para todo $x \in \overline{\Omega}$. Se define $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Ahora denotemos por

$$g_m(x) = -[f(x, u_{m-1}(x)) + h(x) + r u_{m-1}]$$

y

$$g(x) = -[f(x,u(x)) + h(x) + r u(x)]$$

Ya que f es de clase C^1 tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \lim_{m\to\infty} -[f(x,u_{m-1}(x)) + h(x) + r u_{m-1}(x)] = g(x), \forall x \in \Omega.$$

Así existe $r > 0$ tal que $\|g_m\|_\infty \leq r$ y $\|g\|_\infty \leq r$ para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$

Tomemos p suficientemente grande tal que $\alpha < 1 - \frac{N}{p}$. Ya que $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$ y $\|g_m\| \leq r$, se tiene, integrando que

$$\left(\int_\Omega |g_m(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|g_m - g\|_p \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

además se tiene que

$$\|u_m - u_n\|_{1+\alpha} \leq c_1\|u_m - u_n\|_{2,p} \leq c_1 c_2\left[\|g_m - g\|_p + \|g_n - g\|_p\right] \to 0$$

cuando $m \to \infty$ y $n \to \infty$. Lo anterior quiere decir que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$-norma. Entonces u_m converge a u en $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$-norma.

En lo que sigue demostraremos que $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge en $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Para esto denotemos por

$$g_{mn}(x) = g_m(x) - g_n(x) = -\left[f(x, u_{m-1}(x)) - f(x, u_{n-1}(x)) + r(u_{m-1}(x) - u_m(x))\right]$$

ya que f y ∇ son funciones uniformemente continuas en $\overline{\Omega} \times \left[\inf_{\overline{\Omega}} w, \sup_{\overline{\Omega}} v\right]$ y $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge en $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$-norma tenemos que si $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que $n, m \geq N(\epsilon)$,

$$\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla f(x, u_{m-1}(x)) - \nabla f(x, u_{n-1}(x))| < \epsilon$$

y

$$\sup_{\overline{\Omega}} r\|\nabla u_{m-1} - \nabla u_{n-1}\| \leq r\|u_{m-1} - u_{n-1}\|_{1+\alpha} < \epsilon$$

tenemos

$$\begin{aligned}\|g_{mn}(x) - g_{mn}(y)\| &= \|\nabla g_{mn}(\xi)(x-y)\| \\ &\leq (|\nabla f(\xi, u_{m-1}(\xi)) - \nabla f(\xi, u_{n-1}(\xi))| + r|\nabla(u_{m-1} - u_{n-1})(\xi)|\,)|x-y|.\end{aligned}$$

Ahora

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{\|g_{mn}(x) - g_{mn}(y)\|}{|x-y|^{\alpha}} \leq 2d^{1+\alpha}$$

donde d es el diámetro de $\overline{\Omega}$ teniéndose que

$$\|g_m - g_n\|_{\alpha} = \|g_n - g_m\|_{\infty} + \overline{H}(g_m - g_n) < \epsilon + 2d^{1-\alpha} = \epsilon(1 + 2d^{1-\alpha})$$

Luego $\|g_m - g_n\|_{\alpha} \to 0$, cuando $n, m \to \infty$.

Por el teorema de existencia de Schauder, existe $\overline{k} > 0$ tal que

$$\|u_m - u_n\|_{2+\alpha} \leq \overline{k}\|M(u_m - u_n)\|_{\alpha} \leq \overline{k}\|g_m - g_n\|_{\alpha} \to 0,\ n, m \to \infty$$

Esto quiere decir que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a u en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} M(u_n) = M(u)$$

$$\begin{aligned}M[u](x) &= \lim_{m \to \infty} M[u_m](x) = \lim_{m \to \infty}[-f(x, u_{m-1}(x)) + ru_{m-1}(x) + h(x)] \\ &= -[f(x, u(x)) + ru(x) + h(x)]\end{aligned}$$

pero

$$M[u](x) = L[u](x) - ru(x) = -f(x, u(x)) - ru(x) - h(x)$$

Luego

$$\begin{cases} L[u](x) = -[f(x, u(x)) + h(x)] & \text{en } \Omega \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

□

48.Para cada $f \in F$ existe una única función $u \in \mathbb{B}$ que cumple $L[u] = f$. Además existen constantes $\overline{k}_1 > 0$ (la cual depende de un número $\beta \in (0,1)$ fijo) y $\overline{k}_2 > 0$ tales que:

$$(a)\|u\|_{\mathbb{B}} \le \overline{k}_1 \|L[u]\|_F$$
$$(b)\|u\|_{1+\beta} \le \overline{k}_2 \|L[u]\|_\infty$$

donde F es el espacio de Banach conformado por las funciones $f \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \Re)$, tales que $f(,t+T) \equiv f(x,t)$, con la norma $\|.\|_F$ definida por

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}\times\,[0,T])} = \|f\|_F$$

♣

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es hallar una solución (u,v) de un sistema no lineal la cual tiene el mismo espíritu de todos los fascículos que he puesto en el ciber espacio para que el interesado vea un tipo de problema con mucha exigencia y que frecuentemente se conoce como una investigación en ecuaciones diferenciales. El problema está dado por

$$(I)\begin{cases} L[u](x,t) \equiv u(x,t)[a(x,t) - a_1 u(x,t) - a_2 v(x,t)] \text{ en } \Omega \times \Re \\ L[v](x,t) \equiv v(x,t)[b(x,t) - b_1 v(x,t) - b_2 u(x,t)] \text{ en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0,\ v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\Re^N$, $N \ge 2$, $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$,

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \overline{b_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right)$$

$a(x,t) > 0, b(x,t) > 0, a_{ij} = a_{ji}, \overline{b_i}, c(\le 0)$ son funciones periódicas con período T, además $a_1, a_2, b_1,$ y b_2 son constantes positivas.

Se hallará la solución del problema (I) bajo las hipótesis generales siguientes:

(1) $a(x,t) > \lambda_1$

(2) Se toman a_1, a_2, b_1, b_2 tales que $a_1 > b_2, b_1 > a_2$,

$$0 < a_1 b_1 - a_2 b_2 < 1$$
$$0 < a_1 a_2 - a_2 b_2 < 1$$
$$a_1 b_1 - a_2 b_2 > a_1 a_2 - a_2 b_2.$$

En esta forma es posible hallar valores de a y b tan grandes que

$$b - \frac{b_2 c + a b_2}{a_1} > 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - \frac{\lambda_1}{a} > \tau$$

donde $\tau = \left(\frac{a_1 a_2 - a_2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2}\right) m^*$ con $m^* = \max\{2, \frac{b}{a}\}$.

(3) $b - b_2 u_0$ se toma suficientemente grande de manera que λ_2 es tal que $0 < \lambda_2 < 1$, entonces λ_2 es el valor propio principal del problema de frontera dado por

$$(II) \quad \begin{cases} L[u] = \lambda(b - b_2 u_0) \text{ en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0,\quad v > 0 \text{ en } \Omega \times \Re \end{cases}$$

y con u_0 la única solución del problema

$$(III)\quad \begin{cases} L[u] = u(\overline{a} - a_1 u) \text{ en } \partial\Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0\,,\; u > 0 \text{ en } \Omega \times \Re \end{cases}$$

donde $\overline{a} = a - \tau_0 a$ con $1 - \frac{\lambda_1}{a} > \tau_0 > \tau$, y donde λ_1 es el valor propio principal del problema

$$(IV)\quad \begin{cases} L[u] = \lambda u \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \;\; \text{en} \;\; \Omega \times \Re \end{cases}$$

con función propia φ_0 asociada a λ_1 y $\|\varphi_0\|_\infty = 1$.

§1. MÉTODO DE ITERACIÓN MONÓTONA

Este parágrafo será dedicado a la demostración de algunos lemas que facilitan la prueba final del problema (I) y en los cuales se presenta un modelo de convergencia monótona siguiendo ideas dadas por el profesor Luis Ortega en el seminario de ecuaciones diferenciales parciales [18].
Consideremos el espacio funcional $\mathbb{E}$ dado por

$$\mathbb{E}=\left\{u \in C^{2+\alpha}(\Omega\times\Re)\Big/ u(x,t+T) = u(x,t),\, u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0\right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{\mathbb{E}} = \|u\|_{2+\alpha}^{\Omega\times\|0,T\|} + \sum_{i.j=1}^{N} \left\|u_{x_i x_j}\right\|_{\alpha}^{\Omega\times[0,T]}$$

$\mathbb{E}$ es un espacio de Banach, en este espacio valen las siguientes desigualdades

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq k\|L[u]\|_{\alpha}^{\Omega\times[0,T]}$$
$$\|u\|_{1+\beta} \leq \overline{k}\|L[u]\|_{\infty},\; u \in \mathbb{E}$$

Sea

$$\overline{\mathbb{E}} = \left\{(u,v) \in \mathbb{E}\times\mathbb{E}\Big/ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0\right\}$$

con la norma

$$\|(u,v)\|_{\mathbb{E}} = \max\{\|u\|_{2+\alpha}, \|v\|_{2+\alpha}\}$$

$\overline{\mathbb{E}}$ es un espacio de Banach.
Usando los métodos de iteración monótona y bifurcación global, daremos nueve lemas que llevan a la existencia de la solución del problema (I).

DEFINICIÓN: A un par de funciones $(\overline{u},\overline{v})$ se le denomina supersolución de (I) si

$$\overline{u}(X,t+T) \equiv \overline{u}(x,t)\,,\, \overline{v}(x,t+T) \equiv \overline{v}(x,t) \;\text{ en } \overline{\Omega}\times\Re,\; \overline{u},\overline{v} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$$

y satisfacen la siguiente desigualdades

$$\begin{cases} L[\overline{u}] \geq \overline{u}[a - a_1\overline{u} - a_2\overline{v}] \;\text{ en }\; \Omega\times\Re \\ L[\overline{v}] \geq \overline{v}[b - b_1\overline{v} - b_2\overline{u}] \;\text{ en }\; \Omega\times\Re \\ \overline{u} \geq 0 \;,\; \overline{v} \geq 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\times\Re \end{cases}$$

Análogamente, un par de funciones $(\underline{u},\underline{v})$ es una subsolución de (I) si las funciones $\underline{u}$ y $\underline{v}$ satisfacen las desigualdades

$$\begin{cases} L[\underline{u}] \le \underline{u}[a - a_1\underline{u} - a_2\underline{v}] \text{ en } \Omega\times\Re \\ L[\underline{v}] \le \underline{v}[b - b_1\underline{v} - b_2\underline{u}] \text{ en } \Omega\times\Re \\ \underline{u} \le 0 \ , \ \underline{v} \le 0 \text{ en } \partial\Omega\times\Re \end{cases}$$

$\underline{u}(x,t+T) \equiv \underline{u}$, $\underline{v}(x,t+T) \equiv \underline{v}(x,t)$, $\underline{u},\underline{v} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$.

PRINCIPIO FUERTE DEL MÁXIMO. Supongamos que $u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$, $L[u] \le 0$ en $\overline{\Omega}\times\Re$ y u obtiene un máximo en $\overline{\Omega}\times\Re$ en un punto $P_0 = (x_0,t_0) \in \overline{\Omega}\times\Re$. Si $u(P_0) > 0$ entonces $u \equiv u(P_0)$ en $\Omega\times[a,t_0]$.

LEMA 1. Si $\underline{u}$, $\overline{u}$, $\underline{v}$, $\overline{v} \in C^2(\Omega\times\Re)$ son funciones tales que satisfacen

$(a) L[\underline{u}] \le \underline{u}(a - a_1\underline{u} - a_2\overline{v})$ en $\Omega\times\Re$

$(b) L[\overline{u}] \ge \overline{u}(a - a_1\overline{u} - a_2\underline{v})$ en $\Omega\times\Re$

$(c) L[\underline{v}] \le \underline{v}(b - b_1\underline{v} - b_2\underline{u})$ en $\Omega\times\Re$

$(d) L[\overline{v}] \ge \overline{v}(b - b_1\overline{v} - b_2\overline{u})$ en $\Omega\times\Re$

$(e)\ \underline{u}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, \qquad 0 \le \underline{u} \le \overline{u}, \qquad 0 \le \underline{v} \le \overline{v}$ en $\overline{\Omega}\times\Re$

donde $\underline{u}(x,t+T) \equiv \underline{u}(x,t)$, $\underline{v}(x,t+T) \equiv \underline{v}(x,t)$, $\underline{u},\underline{v} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$

$\overline{u}(x,t+T) \equiv \overline{u}(x,t)$, $\overline{v}(x,t+T) \equiv \overline{v}(x,t)$, $\overline{u},\overline{v} \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$

entonces existe una solución (u,v) del problema (I) tal que

$$\underline{u} \le u \le \overline{u}, \qquad \underline{v} \le v \le \overline{v} \quad \text{en } \Omega\times\Re$$

DEMOSTRACIÓN: Se define la siguiente truncación

$$(\rho u)(x,t) = \begin{cases} \overline{u}(x,t) & \text{si } u(x,t) > \overline{u}(x,t) \\ u(x,t) & \text{si } \underline{u}(x,t) \le u(x,t) \le \overline{u}(x,t) \\ \underline{u}(x,t) & \text{si } u(x,t) < \underline{u}(x,t) \end{cases} \quad \text{para } u \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$$

(V)

$$(\rho v)(x,t) = \begin{cases} \overline{v}(x,t) & \text{si } v(x,t) > \overline{v}(x,t) \\ v(x,t) & \text{si } \underline{v}(x,t) \le v(x,t) \le \overline{v}(x,t) \\ \underline{v}(x,t) & \text{si } v(x,t) < \underline{v}(x,t) \end{cases} \quad \text{para } v \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$$

Para $u,v \in \mathbb{E}$ definimos

$$(VI) \qquad \begin{cases} h_1(u,v) = (\rho u)[a - a_1(\rho u) - a_2(\sigma v)] \\ h_2(u,v) = (\sigma v)[b - b_1(\sigma v) - b_2(\rho u)] \end{cases}$$

Consideramos ahora el operador T dado por

$$T(u,v) = (j\circ h_1(u,v), j\circ h_2(u,v))$$

donde $j = i_0 \circ (L)^{-1}$, siendo

$$(L)^{-1} : C^\alpha\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) \longrightarrow C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$$

$$i_0 : C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) \longrightarrow C^\alpha(\Omega\times[0,T])$$

funciones completamente continuas. Consideremos el problema

$$(VII) \qquad \begin{cases} L[u] = h_1(u,v) \text{ en } \Omega\times\Re \\ L[v] = h_2(u,v) \text{ en } \Omega\times\Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, \quad v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

Mostremos que (VII) tiene solución y que toda solución de (VII) es solución de (I), para eso consideremos tres etapas:
Primera etapa: T aplica $\overline{\mathbb{E}}$ en $\overline{\mathbb{E}}$, puesto que

$$h_1(u,v),\ h_2(u,v) \in \overline{\mathbb{E}}$$

esto dado que $u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} = v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} = \underline{u}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} = 0$, y de las definiciones de ρu y σv.
Por el teorema del punto fijo de Schauder existen $s, z \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ únicos tales que $s = j\circ h_1(u,v)$ y $z = j\circ h_2(u,v)$, así

$$(s,z) = T(u,v) \qquad \text{y} \qquad (s,z)\in\overline{\mathbb{E}}$$

Por otra parte se sabe que existe $\overline{k} > 0$ tal que

$$\|j\circ f\|_{2+\alpha} \le \overline{k}\|f\|_\infty$$

donde $f = L[u]$. De aquí

$$\|j\circ h_1(u,v)\|_{2+\alpha} \le \overline{k}\|h_1(u,v)\|_\infty,\quad \|j\circ h_2(u,v)\|_{2+\alpha} \le \overline{k}\|h_2(u,v)\|_\infty$$

Se puede por lo tanto encontrar una constante $\frac{r}{\overline{k}}$ de manera que

$$\|h_1(u,v)\|_\infty \le \tfrac{r}{\overline{k}}, \qquad \text{y}, \qquad \|h_2(u,v)\|_\infty \le \tfrac{r}{\overline{k}}$$

Luego en particular si $(u,v)\in\overline{B}_r(0)$ se tiene

$$\|T(u,v)\|_{\mathbb{E}} \le \overline{k}\ \max\{\|h_1(u,v)\|_\infty, \|h_2(u,v)\|_\infty\} \le \overline{k}\tfrac{r}{\overline{k}} = r$$

por lo tanto

$$T\big(\overline{B}_r(0)\big) \subseteq \overline{B}_r(0).$$

Segunda etapa: Por el teorema de Schauder para operadores parabólicos

$$(L)^{-1} : C^\alpha\big(\overline{\Omega}\times[0,T]\big) \longrightarrow C^{2+\alpha}\big(\overline{\Omega}\times[0,T]\big)$$
$$i_0 : C^{2+\alpha}\big(\overline{\Omega}\times[0,T]\big) \longrightarrow C^{\alpha}\big(\overline{\Omega}\times[0,T]\big)$$

son funciones completamente continuas. Veamos que el operador T es completamente continuo.
i. T es continuo: Si $\|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}} \to 0$, vemos que

$$\|T(u,v) - T(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}} \to 0$$

también, como

$$\|T(u,v) - T(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}} =$$
$$= \max\{\|j\circ h_1(u,v) - j\circ h_1(u_1,v_1)\|_{2+\alpha}, \|j\circ h_2(u,v) - j\circ h_2(u_1,v_1)\|_{2+\alpha}\}$$

Mostraremos un poco más adelante que

$$\|\rho u - \rho u_1\|_\infty \le \|u-u_1\|_\infty \ \text{ y } \ \|\sigma v - \sigma v_1\|_\infty \le \|v - v_1\|_\infty$$

y como

$$\|u-u_1\|_\infty \le \|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}} \ \text{ y } \ \|v-v_1\|_\infty \le \|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}}$$

por transitividad se sigue

$$\|\rho u - \rho u_1\|_\infty \le \|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}} \ \text{ y } \ \|\sigma v - \sigma v_1\|_\infty \le \|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\mathbb{E}}.$$

Por otra parte son conocidas las siguientes desigualdades

$$\|f\|_{2+\alpha} \le \|f\|_\alpha \le \|f\|_{1+\alpha} \le k_1\|f\|_{2,p} \le k_1k_2\|Lf\|_p \le \overline{k}\|Lf\|_\infty$$

de donde se sigue que

$$\|j\circ f\|_{2+\alpha} \le \overline{k}\|f\|_\infty$$

por lo tanto

$$\|j\circ h_1(u,v) - j\circ h_1(u_1,v_1)\|_{2+\alpha} \le \overline{k}\|L(j\circ(h_1(u,v) - h_1(u_1,v_1)))\|_\infty$$

$$\leq \overline{k}\|h_1(u,v)-h_1(u_1,v_1)\|_\infty \leq$$
$$\leq \overline{k}\left[a\|\rho u-\rho u_1\|_\infty + a_1\left\|(\rho u)^2-(\rho u_1)^2\right\|_\infty + a_2\|\rho u\sigma v-\rho u_1\sigma v_1\|_\infty\right]$$
$$\leq \overline{k}[a\|u-u_1\|_\infty + 2a_1\|\overline{u}\|_\infty\|u-u_1\|_\infty + a_2(\|\overline{v}\|_\infty\|u-u_1\|_\infty + \|\overline{u}\|_\infty\|v-v_1\|_\infty)]$$

Luego

$$\|j\circ h_1(u,v)-j\circ h_1(u_1,v_1)\|_{2+\alpha}\to 0$$

Análogamente se obtiene que $\|j\circ h_2(u,v)-j\circ h_2\|_{2+\alpha}\to 0$.

De esto se deduce que

$$\|T(u,v)-T(u_1,v_1)\|_{\overline{\mathbb{E}}}\to 0 \text{ cuando } \|(u,v)-(u_1,v_1)\|_{\overline{\mathbb{E}}}\to 0.$$

ii. T es completamente continuo: Sea $\{(u_n,v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $\overline{\mathbb{E}}$ una sucesión acotada, así existe una constante k_4 tal que $\|(u_n,v_n)\|_{\overline{\mathbb{E}}}\leq k_4$ para todo n, veamos que $\{T(u_n,v_n)\}$ tiene una subsucesión convergente en la norma de $\overline{\mathbb{E}}$.

Para la definición de la norma en $\overline{\mathbb{E}}$ se sigue que

$$\|u_n\|_{2+\alpha}\leq k_4\ , \qquad \|v_n\|_{2+\alpha}\leq k_4$$

Sean $k_5 = 2\max\{\|\overline{u}\|_{2+\alpha},\|\underline{u}\|_{2+\alpha},k_4\}$ y $k_6 = 2\max\{\|\overline{v}\|_{2+\alpha},\|\underline{v}\|_{2+\alpha},k_4\}$ entonces para todo n tenemos

$$\|\rho u_n\|_{2+\alpha}\leq k_5 \qquad , \qquad \|\sigma v_n\|_{2+\alpha}\leq k_6$$

Como en $\mathbb{E}$ vale la desigualdad $\|u\|_{1+\beta}\leq \overline{k}\|L(u)\|_\infty,\ \ u\in\mathbb{E}$.

Dado que $T(u_n,v_n)=(j\circ h_1(u_n,v_n), j\circ h_2(u_n,v_n))$, tenemos

$$\|j\circ h_1(u_n,v_n)\|_{1+\beta}\leq \overline{k}\|L(j\circ h_1(u_n,v_n))\|_\infty = \overline{k}\|h_1(u_n,v_n)\|_\infty$$
$$=\overline{k}\|\rho u_n(a-a_1\rho u_n - a_2\sigma v_n)\|_\infty \leq \overline{k}\left(a\|\overline{u}\|_\infty + a_1\|\overline{u}\|_\infty^2 + a_2\|\overline{u}\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty\right)\leq k_5$$

Luego $\{j\circ h_1(u_n,v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ entonces posee una subsucesión convergente a algún $f^{(1)}\in C^{2+\alpha}(\Omega\times[0,T])$ denotémosla $\{j\circ h_1(u_{n_k},v_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ y

$$\left\|j\circ h_1(u_{n_k},v_{n_k})-f^{(1)}\right\|_{2+\alpha}\to 0, \text{ cuando } k\to\infty.$$

Además para cada k, podemos tomar $(j\circ h_1(u_{n_k},v_{n_k}))\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$ entonces

$$f^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0.$$

Por otra parte la sucesión $\{j\circ h_2(u_{n_k},v_{n_k})\}$ tiene a su vez una sucesión convergente que también denotamos $\{j\circ h_2(u_{n_k},v_{n_k})\}$ para la cual existe $f^{(2)}\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|j\circ h_2(u_{n_k},v_{n_k})-f^{(2)}\right\|_{2+\alpha}=0$.

Como para cada k, $(j\circ h_2(u_{n_k},v_{n_k}))\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$, entonces $f^{(2)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$.

Luego en total, hemos encontrado una subsucesión $\{T(u_{n_k},v_{n_k})\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{T(u_n,v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que existe $\left(f^{(1)},f^{(2)}\right)\in\overline{\mathbb{E}}$ para el cual se satisface que

$$\lim_{k\to\infty}\left\|T(u_{n_k},v_{n_k})-\left(f^{(1)},f^{(2)}\right)\right\|_{\overline{\mathbb{E}}}=0$$

con lo cual hemos probado que T es completamente continuo.

Ahora $\overline{B}_r((0,0))\subseteq\overline{\mathbb{E}}$, es cerrada en $\overline{\mathbb{E}}$, no vacío, acotado y convexo. Por la primera etapa sabemos que $T\left(\overline{B}_r((0,0))\right)\subseteq\overline{B}_r((0,0))$. Entonces por el teorema del punto fijo de Schauder existe $(u,v)\in\overline{B}_r((0,0))$, tal que $T(u,v)=(u,v)$, esto es;

$$u = j \circ h_1(u,v) \Leftrightarrow L[u] = h_1(u,v)$$
$$v = j \circ h_2(u,v) \Leftrightarrow L[v] = h_2(u,v)$$

Así (u,v) es solución del problema (XII)

Para finalizar la segunda etapa, probemos que $\|\rho u - \rho u_1\| \leq \|u - u_1\|_\infty$ (la afirmación $\|\sigma v - \sigma v_1\| \leq \|v - v_1\|_\infty$ se hace en forma semejante).

Para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \Re$ analizamos ocho casos para $u(x,t)$ y $u_1(x,t)$ veamos dos, pues los otros seis se hacen en forma análoga

$i.$ Si $\overline{u}(x,t) \leq u(x,t)$, $u_1(x,t)$, o si $u(x,t)$, $u_1(x,t) \leq \underline{u}(x,t)$ entonces

$$(\rho u - \rho u_1)(x,t) = 0 \leq \|u - u_1\|_\infty$$

$ii.$ Si $\underline{u}(x,t) \leq u(x,t)$, $u_1(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ entonces

$$|\rho u - \rho u_1| = |u(x,t) - u_1(x,t)| \leq \|u - u_1\|_\infty \cdots \text{etc}$$

Tercera etapa: Sea (u,v) solución de (VII), para probar que (u,v) es también solución de (I) basta ver que $\sigma v = v$ y que $\rho u = u$ en $\Omega \times \Re$ o sea ver que en $\Omega \times \Re$, se tiene $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ y $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / u(x,t) > \overline{u}(x,t)\},$$
$$A_2 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / u(x,t) < \underline{u}(x,t)\},$$
$$A_3 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / \underline{u}(x,t) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(x,t)\},$$
$$B_1 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / v(x,t) > \overline{v}(x,t)\},$$
$$B_2 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / v(x,t) < \underline{v}(x,t)\}$$
$$B_3 = \{(x,t) \in \Omega \times \Re / \underline{v}(x,t) \leq v(x,t) \leq \overline{v}(x,t)\}$$

En $\Omega \times \Re$ se tiene

$$L(\overline{u} - u) \geq a(\overline{u} - \rho u) + a_1\left((\rho u)^2 - (\overline{u})^2\right) + a_2((\rho u)(\sigma v) - \overline{u}\underline{v})$$

Si $A_1 \neq \emptyset$ existirá $(y^*,t^0) \in A_1$ para el cual $u(y^*,t^0) > \overline{u}(y^*,t^0)$. Sea $\mathcal{Z}$ la componente conexa de A_1 con $(y^*,t^0) \in \mathcal{Z}$. Por la continuidad de $\overline{u} - u$, $\mathcal{Z}$ contiene una cierta vecindad de (y^*,t^0). En $\mathcal{Z}$, $\overline{u} < u$ luego $\rho u = \overline{u}$, en $\partial\mathcal{Z}$ se tiene $\overline{u} = u$. De modo que en $\mathcal{Z}$ se tiene

$$L(\overline{u} - u) \geq a_2\overline{u}(\sigma v - \underline{v}) \geq 0$$

De donde por el principio del máximo se sigue que

$$\max_{\mathcal{Z}}(\overline{u} - u) = \max_{\partial\mathcal{Z}}(\overline{u} - u) = 0$$

De aquí que para todo $(x,t) \in \mathcal{Z}$ se tendría $u(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ pero esto $(\rightarrow\leftarrow)$ contradice la definición de $\mathcal{Z}$. Luego para todo $(x,t) \in \Omega \times \Re$, $\overline{u}(x,t) \geq u(x,t)$ o sea $A_1 = \emptyset$.

De la misma manera se puede demostrar que $A_2 = \emptyset$.

Ahora en $\Omega \times \Re$ se tiene

$$L[\overline{v} - v] \geq b(\overline{v} - \sigma v) + b_1\left((\sigma v)^2 - \overline{v}^2\right) + b_2(\overline{u}\,\overline{v} - (\sigma v)(\rho u))$$

Si $B_1 \neq \emptyset$, existe $(x^*,t^*) \in B_1$ tal que $v(x^*,t^0) > \overline{v}(x^*,t^0)$.

Sea S la componente conexa de B_1, con $(x^*,t^0) \in S$, por lo menos existe una vecindad de (x^*,t^0) tal que $v(x,t) > \overline{v}(x,t)$ para todo (x,t) en esa vecindad, esto dado que $\overline{v} - v$ es continua. En S se tiene $\overline{v}(x,t) < v(x,t)$ y en ∂S, $\overline{v}(x,t) = v(x,t)$ así $\sigma v = \overline{v}$ en S, entonces

$$L(\overline{v} - v) \geq b_2\overline{v}(\rho u - \overline{u}) \text{ y } b_2\overline{v}(\rho u - \overline{u}) \leq 0.$$

Se tiene ahora dos posibilidades

$L[\overline{v}-v]\geq 0,$ o, $b_2\overline{v}(\rho u-\overline{u})\leq L[\overline{v}-v]\leq 0$

Si $L[\overline{v}-v]\geq 0$, por el principio del máximo se sigue que

$$\max_{\overline{S}}(\overline{v}-v)=\max_{\partial S}(\overline{v}-v)=0$$

De donde para todo $(x,t)\in S$ se tendría $v(x,t)\leq\overline{v}(x,t)$, esto es $(\rightarrow\leftarrow)$ contradictorio con la definición de S.

Si $b_2\overline{v}(\rho u-\overline{u})\leq L[\overline{v}-v]\leq 0$, por el principio del máximo se sigue que

$$\min_{\overline{S}}(\overline{v}-v)=\min_{\partial S}(\overline{v}-v)=0$$

Nuevamente se sigue que para todo $(x,t)\in S$, $v(x,t)\leq\overline{v}(x,t)$, esto es $(\rightarrow\leftarrow)$ contradictorio con la definición de S.

Luego para todo $(x,t)\in\Omega\times\Re$, $v(x,t)\leq\overline{v}(x,t)$ así $B_1=\varnothing$.

Por un método análogo se demuestra que $B_2=\varnothing$.

Se sigue entonces que $A_3=\Omega\times\Re$ y $B_3=\Omega\times\Re$ o sea $\sigma v=v$ y $\rho u=u$.

Por lo tanto (u,v) es solución de (I), pues se tiene

$$h_1(u,v)=u[a-a_1u-a_2v]$$
$$h_2(u,v)=u[b-b_1v-b_2u]$$

además $\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$, $\underline{v}\leq v\leq\overline{v}$ en $\partial\Omega\times\Re$.

LEMA 2. Existe una única solución $\theta\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ del problema

$$(VIII)\begin{cases}L[u]=u[am^*-a_1u] & \text{en}\quad\Omega\times\Re\\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0\ ,\quad u>0 & \text{en}\ \ \Omega\times\Re\end{cases}$$

donde $m^*=\max\left\{2,\frac{b(x,t)}{a(x,t)}\right\}$

DEMOSTRACIÓN: ***a.*** Sea w_1 una subsolución y w_2 una supersolución del problema $(VIII)$ tales que $w_1\leq w_2$ en $\overline{\Omega}\times\Re$. Entonces

$$\begin{cases}L[w_1]\leq w_1[am^*-a_1w_1] & \text{en}\ \ \Omega\times\Re\\ w_1\leq 0 & \text{en}\ \partial\Omega\times\Re\end{cases}$$
$$\begin{cases}L[w_2]\geq w_2[am^*-a_1w_2] & \text{en}\ \ \Omega\times\Re\\ w_2\geq 0 & \text{en}\ \ \partial\Omega\times\Re\end{cases}$$

Sea $h(u)=u[m^*a-a_1u]+ru$, para algún $r>0$ tal que $h(u)$ es estrictamente creciente en el intervalo

$$\left[\inf_{\overline{\Omega}\times\Re}w_1\ ,\ \sup_{\overline{\Omega}\times\Re}w_2\right]$$

Construyamos inductivamente una sucesión $\left\{u_n^{(1)}\right\}$ y una sucesión $\left\{u_n^{(2)}\right\}$ así, por el teorema de Schauder para operadores del tipo parábolico, existen $u_1^{(1)},u_1^{(2)}\in C^{2+\alpha}(\Omega\times\Re)$ tales que

$$\begin{cases}L\left[u_1^{(i)}\right]+ru_1^{(i)}=h(w_i)\ \text{en}\ \Omega\times\Re\ , & i=1,2\\ u_1^{(i)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0 & ,\ i=1,2\end{cases}$$

y para cada $n\geq 1$, existen por el teorema de Schauder $u_{n+1}^{(1)}$, $u_{n+1}^{2}\in C^{2+\alpha}(\Omega\times\Re)$ tales que

$$\begin{cases} L\left[u_{n+1}^{(i)}\right] + ru_{n+1}^{(i)} = h\left(u_n^{(i)}\right) \text{ en } \Omega \times \Re \text{ , } i = 1,2 \\ u_{n+1}^{(i)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} = 0 \end{cases}$$

Dada la monotonía de h y la construcción recurrente anterior se puede probar por inducción que para todo $n = 1,2,3,\ldots$

$$\begin{array}{ll} (I) & w_1 \le u_n^{(1)} \le w_2 \ ; \quad w_1 \le u_n^{(2)} \le w_2 \\ (II) & u_n^{(1)} \le u_{n+1}^{(1)} \\ (III) & u_n^{(2)} \le u_{n+1}^{(2)} \\ (VI) & u_n^{(1)} \le u_n^{(2)} \end{array}$$

Ahora, si $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \Re$ por la acotación y monotonía de las sucesiones $\left\{u_n^{(1)}(x,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{u_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ existen $u^{(1)}(x,t)$, y , $u^{(2)}(x,t)$ tales

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{(1)}(x,t) = u^{(1)}(x,t) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} u_n^{(2)}(x,t) = u^{(2)}(x,t) \tag{1}$$

Sean ahora β, p tales que $0 < \alpha < \beta < 1 - \frac{N}{p}$, entonces para todo $n = 1,2,3,\ldots$ existen constantes $K_1, K_2, K_3 > 0$ tales que no dependen de n y

$$\left\|u_n^{(i)}\right\|_{1+\beta} \le K_1\left\|u_n^{(i)}\right\|_{2,p} \le K_1K_2\left\|L\left[u_n^{(i)}\right]\right\|_p \le K_1K_2K_3\left\|L_1\left[u_n^{(i)}\right]\right\|_{\infty}, \; i = 1,2$$

donde $L_1[u] = L[u] + ru$, el cual también es un operador parabólico. Sea $C = K_1K_2K_3$ entonces

$$\left\|u_n^{(i)}\right\|_{1+\beta} \le C\left\|L_1\left[u_n^{(i)}\right]\right\|_{\infty}, \qquad i = 1,2 \tag{2}$$

Pero,

$$\left\|L_1\left[u_n^{(i)}\right]\right\|_{\infty} = \left\|h\left(u_n^{(i)}\right)\right\|_{\infty} \le M_1 \text{ ,} \qquad i = 1,2$$

con

$$M_1 = \|w_2\|_{\infty}(am^* + a_1\|w_2\|_{\infty} + r\|w_2\|_{\infty})$$

Luego de (2)

$$\left\|u_n^{(i)}\right\|_{1+\beta} \le CM_1 \text{ ,} \qquad i = 1,2 \tag{3}$$

De (3) y el hecho que $i : C^{1+\beta}(\overline{\Omega} \times \Re) \longrightarrow C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ es la inclusión, la cual es compacta, se sigue que la sucesión $\left\{i\left(u_n^{(1)}\right)\right\} = \left\{u_n^{(1)}\right\}$ tiene una subsucesión que denotamos también $\left\{u_n^{(1)}\right\}$ convergente a una cierta función $\overline{u}$ en la norma de $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ luego también en la norma de $C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$.

Análogamente $\left\{i\left(u_n^{(2)}\right)\right\} = \left\{u_n^{(2)}\right\}$ va a poseer una subsucesión que denotamos también $\left\{u_n^{(2)}\right\}$ convergente a una cierta función $\overline{\overline{u}}$ en la norma de $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$, luego también en la de $C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n^{(2)} - \overline{\overline{u}}\right\|_{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \left\|u_n^{(2)} - \overline{\overline{u}}\right\|_{\alpha}^{\overline{\Omega}\times\left[\frac{T}{2},r\right]} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n^{(1)}-\overline{u}\right\|_\alpha=0 \Leftrightarrow \left\|u_n^{(1)}-\overline{u}\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]} \to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

para algún $r>\frac{T}{2}$. Sea ϕ una función suave tal que

$\phi\left(\frac{T}{2}\right)=0$ y $\phi(t)=1$ para $t>T$

Sea $n>m\geq 1$, puesto que

$\phi\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)=0$ en $\partial\Omega\times\left[\frac{T}{2},\infty\right)$ y $\partial\Omega\times\left\{\frac{T}{2}\right\}$, $i=1,2$

para cualquier $r>\frac{T}{2}$, entonces existe una constante K_4 independiente de m y n tal que

$$\begin{aligned}\left\|\phi\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)\right\|_{2+\alpha}^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]} &\leq K_4\left\|L_1\left(\phi\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)\right)\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]}\\ &\leq K_5K_6\left\|u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]}\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\left\|L_1\left(\phi\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)\right)\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]} &= \left\|\phi'\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]}\\ &\leq K_5\left\|u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]}\end{aligned}$$

Así si $r>T$ se tiene

$$\left\|u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right\|_{2+\alpha}^{\overline{\Omega}\times[T,r]} \leq \left\|\phi\left(u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right)\right\|_{2+\alpha}^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]} \leq K_4K_5\left\|u_n^{(i)}-u_m^{(i)}\right\|_\alpha^{\overline{\Omega}\times[\frac{T}{2},r]}, i=1,2$$

Entonces $\left\{u_n^{(1)}\right\}$ y $\left\{u_n^{(2)}\right\}$ son sucesiones de Cauchy en $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ por el teorema de extensión de Tietze se tiene que también son sucesiones de Cauchy en $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$, como éste es un espacio de Banach existen $\widehat{u},\widehat{\widehat{u}}\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n^{(1)}-\widehat{u}\right\|_{2+\alpha}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left\|u_n^{(2)}-\widehat{\widehat{u}}\right\|_{2+\alpha}=0 \tag{5}$$

Por lo tanto de (4), (5) y la construcción de $u^{(1)}(x,t)$ y $u^{(2)}(x,t)$ en (1) se tiene

$$u^{(1)}(x,t)=\overline{u}(x,t)=\widehat{u}(x,t) \quad , \quad u^{(2)}(x,t)=\overline{\overline{u}}(x,t)=\widehat{\widehat{u}}(x,t)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$$

y de (1) al tomar límite cuando $n\to\infty$ se obtiene que

$$\begin{cases} L[\widehat{u}]+r\widehat{u}=\widehat{u}[m^*a-a_1\widehat{u}]+y\widehat{u} & \text{en } \Omega\times\Re\\ L\left[\widehat{\widehat{u}}\right]+r\widehat{\widehat{u}}=\widehat{\widehat{u}}\left[m^*a-a_1\widehat{\widehat{u}}\right]+r\widehat{\widehat{u}} & \text{en } \Omega\times\Re\\ \widehat{u}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0,\ \widehat{\widehat{u}}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0 \end{cases}$$

De esto se tiene que : $\widehat{u}$ y $\widehat{\widehat{u}}$ son soluciones de $(VIII)$ y de (I), (II), (III), y (IV) se tiene que

$$w_1\leq\widehat{u}\leq w_2, \qquad w_1\leq\widehat{\widehat{u}}\leq w_2, \qquad \widehat{u}\leq\widehat{\widehat{u}}$$

Lo cual implica que en total $\widehat{u},\widehat{\widehat{u}}$ cumplen

$$w_1\leq\widehat{u}\leq\widehat{\widehat{u}}\leq w_2 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}\times\Re.$$

b. Seleccionemos un número $\beta>0$, suficientemente pequeño tal que

$$\lambda_1+\beta a_1\varphi_1<a(x,t)m^* \text{ en } \Omega\times\Re$$

y denotemos por $u^{(1)}\equiv\beta\varphi_1$.

Tenemos

$$\lambda_1\beta\varphi_1 + a_1\beta^2\varphi_1^2 \le am^*\beta\varphi_1 \Leftrightarrow \lambda_1\beta\varphi_1 \le am^*\beta\varphi_1 - a_1\beta^2\varphi_1^2$$

o sea que

$$\lambda_1 u^{(1)} \le u^{(1)}\left(am^* - a_1 u^{(1)}\right)$$

Esta desigualdad implica que

$$L\left[u^{(1)}\right] \equiv \lambda_1\beta\varphi_1 \le u^{(1)}\left(am^* - a_1 u^{(1)}\right) \text{ en } \Omega\times\Re$$

entonces $u^{(1)}$ es una subsolución para $(VIII)$.

Tomemos un número $k>0$ suficientemente grande, tal que

$$am^* - a_1 k < 0 \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re\,, \qquad k > u^{(1)} \text{ en } \Omega\times[0,T]$$

y denotemos $u^{(2)} = k$, así

$$L[k] = L\left[u^{(2)}\right] = -ck \ge 0 > u^{(2)}\left[am^* - a_1 u^{(2)}\right] \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re$$

Por lo tanto $u^{(2)}$ es una supersolución de $(VIII)$.

c. Sean $\widehat{\theta}$, $\widehat{\widehat{\theta}}$ las soluciones de $(VIII)$ dadas por la parte $a.$ ahora para $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ de la parte $b.$ se tendrá

$$u^{(1)} \le \widehat{\theta} \le \widehat{\widehat{\theta}} \le u^{(2)} \qquad \text{en } \overline{\Omega}\times\Re$$

Sea ahora z, cualquier solución de $(VIII)$ tal que $z \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ y $z>0$ en $\Omega\times\Re$. Sea $u_0^{(2)}$ constante positiva tal que $u_0^{(2)} > u^{(2)}$ y $u_0^{(2)} > \|z\|_\infty$ en $\overline{\Omega}\times\Re$; por ejemplo $u_0^{(2)} = \sup\limits_{\overline{\Omega}\times[0,T]}\left\{u^{(2)}, \|z\|_\infty\right\}$

$$L\left[u_0^{(2)}\right] = -cu_0^{(2)} \ge 0 \text{ pues } c \le 0$$

Ahora

$$f\left((x,t), u_0^{(2)}\right) = u_0^{(2)}\left(m^*a - a_1 u_0^{(2)}\right) \le u_0^{(2)}\left(m^*a - a_1 u^{(2)}\right) < 0 \le L\left[u_0^{(2)}\right]$$

Luego

$$\begin{cases} -L\left[u_0^{(2)}\right] + f\left((x,t), u_0^{(2)}\right) \le 0 & \text{en } \Omega\times\Re \\ u_0^{(2)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} > 0 \ge 0 & \end{cases}$$

entonces $u_0^{(2)}$ es una supersolución de $(VIII)$.

Sea ahora $s>0$, tal que $s + m^*a - a_1 z > 0$ en $\Omega\times\Re$

Entonces

$$L[z] + sz = z(am^* - a_1 z) + sz = z(s + m^*a - a_1 z) > 0$$

Es conocido, del lema 2 del teorema A_1 que se demuestra en el apéndice y del hecho de que $\partial\Omega\times\Re$ es de clase $C^{2+\alpha}$, que $\frac{\partial z}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega\times\Re$ y se puede mostrar que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$z - \delta_1\varphi_1 > 0$$

incluso podemos seleccionar $\delta_1 < \beta$. Así se define $u_0^{(1)} = \delta_1\varphi_1$, entonces en $\Omega\times\Re$ se tiene

$$L\left[u_0^{(1)}\right] = \delta_1\lambda_1\varphi_1 = u_0^{(1)}\lambda_1 < u_0^{(1)}(m^*a - a_1\beta\varphi_1) \le u_0^{(1)}(m^*a - a_1\varphi_1\delta_1)$$
$$= u_0^{(1)}\left(m^*a - a_1 u_0^{(1)}\right) \text{ y } u_0^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \le 0$$

Luego $u_0^{(1)}$ es subsolución de $(VIII)$ y se tiene

$$u_0^{(1)} < z \text{ en } \Omega\times\Re; \qquad u_0^{(1)} < u^{(1)} \text{ en } \Omega\times\Re; \qquad u_0^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$$

En resumen se tiene

$$u_0^{(1)} \le z \le u_0^{(2)} \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \Re \tag{6}$$

$$u_0^{(1)} \le u^{(1)} \le \widehat{\theta} \le \widehat{\widehat{\theta}} \le u^{(2)} \le u_0^{(1)} \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{7}$$

Como $u_0^{(1)}$ y $u_0^{(2)}$ son respectivamente subsolución y supersolución de $(VIII)$ y $u_0^{(1)} \le u_0^{(2)}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, entonces por la parte $a.$ existen $\widehat{z}, \widehat{\widehat{z}} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ soluciones de $(VIII)$ tales que

$$u_0^{(1)} \le \widehat{z} \le \widehat{\widehat{z}} \le u_0^{(2)} \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{8}$$

Además por (6) y (7) y la parte (a)

$$\widehat{z} \le z \le \widehat{\widehat{z}} \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{9}$$

$$\widehat{z} \le \widehat{\theta} \le \widehat{\widehat{\theta}} \le \widehat{\widehat{z}} \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{10}$$

y $\widehat{z}$, $\widehat{\widehat{z}}$ cumplen

$$\begin{cases} L(\widehat{z}) = \widehat{z} & \text{en} \quad \Omega \times \Re \\ L(\widehat{\widehat{z}}) = \widehat{\widehat{z}} & \text{en} \quad \Omega \times \Re \\ \widehat{z}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, \quad \widehat{\widehat{z}}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases} \tag{11}$$

donde $P = m^*a - a_1\widehat{\widehat{z}}$ y $Q = m^*a - a_1\widehat{z}$

Como $-a_1\widehat{z} \ge -a_1\widehat{\widehat{z}}$ en $\Omega \times \Re$, entonces $P \le Q$ en $\Omega \times \Re$, luego por el teorema de comparación del apéndice, y como $\widehat{z}, \widehat{\widehat{z}} > 0$ no cambian de signo, entonces $P \equiv Q$ en $\Omega \times \Re$, luego $\widehat{z} = \widehat{\widehat{z}}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, de esto y de (9) y (10) se tiene que

$$z = \widehat{\theta} = \widehat{\widehat{\theta}} \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \Re.$$

Esta única solución positiva en $\Omega \times \Re$ de $(VIII)$ con $z \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ la denotaremos con θ, es la solución deseada y la demostración del lema queda completa.

□

LEMA 3. Sea θ la solución obtenida por el problema $(VIII)$ del lema $2.$ entonces el sistema

$$(IX) \quad \begin{cases} L[u] = u(m^*a - a_1u - a_2v) \text{ en } \Omega \times \Re \\ L[v] = v(m^*a - b_1v - b_2u) \text{ en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, \quad v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución (u,v) con u,v positivas en $\Omega \times \Re$ y $u,v \in C^{2+\alpha}(\Omega \times \Re)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $u = \alpha_1\theta$, $v = \beta_1\theta$ con α_1, β_1 por determinar y tales que (u,v) sea solución de prueba de (IX). Entonces en $\Omega \times \Re$

$$\begin{cases} \alpha_1 L[\theta] = \alpha\theta(m^*a - a_1\alpha_1\theta - a_2\beta_1\theta) \\ \beta_1 L[\theta] = \beta\theta(m^*a - b_1\beta_1\theta - b_2\alpha_1\theta) \end{cases}$$

Por hipótesis

$$\begin{cases} L[\theta] = \theta(am^* - a_1\theta) \text{ en } \Omega \times \Re \\ \theta\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

Como $u,v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$, tenemos el sistema

$$\alpha_1(\theta(am^* - a_1\theta)) = \alpha_1\theta(m^*a - a_1\alpha_1\theta - a_2\beta_1\theta)$$
$$\beta_1(\theta(am^* - a_1\theta)) = \beta_1\theta(m^*a - b_1\beta_1\theta - b_2\alpha_1\theta)$$

Luego si $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ y $\theta > 0$ en $\Omega \times \Re$, se tiene

$$a_1 = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1$$
$$a_1 = b_2\alpha_1 + b_1\beta_1$$

de donde se obtiene

$$\alpha_1 = \frac{a_1b_1 - a_1a_2}{a_1b_1 - a_2b_2}, \qquad \beta_1 = \frac{a_1^2 - a_1b_2}{a_1b_1 - a_2b_2}$$

Ahora es claro que $(\alpha_1\theta, \beta_1\theta)$ satisface (IX) ya que $\alpha_1\theta, \beta_1\theta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$. Además de la hipótesis general (2) tenemos $a_1 > b_2$ y $b_1 > a_2$ de donde

$$a_1b_1 - a_2b_2 > 0, \qquad a_1^2 - a_1b_2 > 0$$

teniéndose que $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ y $\alpha_1\theta > 0$, $\beta_1\theta > 0$ en $\Omega \times \Re$, esto demuestra el lema.

□

Tomemos ahora $\gamma_0 > 0$ tal que, usando las hipótesis generales (1) y (2)

$1 - \frac{\lambda_1}{a} > \gamma_0 > \tau$, entonces $a - \lambda_1 > a\gamma_0 > a\tau$

Sea ahora $\overline{a} = a - a\gamma_0$, entonces $\overline{a} > \lambda_1$

Sea $\epsilon_1 > 0$, tal que $\epsilon_1 < \frac{\overline{a} - \lambda_1}{a_1}$, tomemos ahora

$\gamma = \frac{(\overline{a} - \lambda_1) - a_1\epsilon_1}{a_2} > 0$ y $\mathbb{B} = \{u \in C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re) / \ u \geq 0 \text{ en } \Omega \times \Re\}$

Para cada $v \in \mathbb{B}$ se define la siguiente truncación

$$\sigma^* v(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{si } v(x,t) \leq \gamma \\ \gamma & \text{si } v(x,t) > \gamma \end{cases}$$

LEMA 4. Para cada $v \in \mathbb{B}$, existe una única función

$$u = u(v) \in \mathbb{B} \cap C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$$

tal que

$$(X) \qquad \begin{cases} L[u] = u[\overline{a} - a_1u - a_2\sigma^*(v)] & \text{en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0 \end{cases}$$

con $u > 0$ en $\Omega \times \Re$.

DEMOSTRACIÓN: Como en el lema 2. se prueban las siguientes tres etapas

Primera etapa: Si w_1 es una subsolución y w_2 una supersolución de (X) y $w_1 \leq w_2$ en $\overline{\Omega} \times \Re$ existen $u^{(1)}, u^{(2)} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ tales que $w_1 \leq u^{(1)} \leq u^{(2)} \leq w_2$ en $\overline{\Omega} \times \Re$ y para cualquier $z \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$, solución de (X) tal que $w_1 \leq z \leq w_2$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, entonces $u^{(1)} \leq z \leq u^{(2)}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$.

Segunda etapa: Existen $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ que son respectivamente subsolución y supersolución de (X) y son positivas en $\Omega \times \Re$.

Tercera etapa: Existe una única solución de (X), positiva en $\Omega \times \Re$ y perteneciente a $\mathbb{B} \cap C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$.

Veámoslo, sea $v \in \mathbb{B}$, entonces

(i) Sean w_1 una subsolución y w_2 una supersolución de (X) con $w_1 \leq w_2$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, entonces

$$\begin{cases} L[w_1] \leq w_1[\overline{a} - a_1w_1 - a_2\sigma^*(v)] & \text{en } \Omega \times \Re \\ \quad w_1 \leq 0 & \text{en } \partial\Omega \times \Re \end{cases}$$

$$\begin{cases} L[w_2] \geq w_2[\overline{a} - a_1 w_2 - a_2\sigma^*(v)] \text{ en } \Omega \times \Re \\ w_2 \geq 0 \text{ en } \partial\Omega \times \Re \end{cases}$$

Sea $g(u) = u[\overline{a} - a_1 u - a_2\sigma^*(v)]$ y tómese $r > 0$ tal que $h(u) = g(u) + ru$ sea estrictamente creciente en el intervalo $\left[\inf_{\overline{\Omega}\times\Re} w_1 , \sup_{\overline{\Omega}\times\Re} w_2\right]$, de aquí en adelante se sigue exactamente el mismo modelo de prueba de (a) dada en el lema 2.

(ii) Seleccionamos un $\beta > 0$, suficientemente pequeño tal que

$$\lambda_1 + a_1\beta\varphi_1 < \overline{a} - a_2\sigma^*(v) \text{ en } \Omega \times \Re$$

Más exactamente β puede tomarse de tal manera que $0 < \beta < \epsilon_1$ donde $\epsilon_1 = \frac{\overline{a} - \gamma a_2 - \lambda_1}{a_1}$, y denotémoslo con $Y^{(1)} \equiv \beta\varphi_1$. Tenemos

$$\beta\lambda_1\varphi_1 + \beta^2\varphi_2^2 a_1 \leq \overline{a}\beta\varphi_1 - a_2\sigma^*(v)\beta\varphi_1$$
$$\beta\lambda_1\varphi_1 \leq \overline{a}\beta\varphi_1 - a_2(\beta\varphi_1)^2 - a_2\sigma^*(v)\beta\varphi_1$$

o sea

$$\lambda_1 Y^{(1)} \leq Y^{(1)}(\overline{a} - a_1 Y^{(1)} - a_2\sigma^*(v))$$

entonces $Y^{(1)}$ es una subsolución para (X).

Tomemos un número $k > 0$ suficientemente grande tal que

$$\overline{a} - a_1 k - a_2\sigma^*(v) < 0 \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re \text{ , } \quad k > Y^{(1)} \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re$$

$\left(\text{por ejemplo } k \geq \sup_{\overline{\Omega}\times[0,T]} Y^{(1)}(x,t)\right)$ y denotemos con $Y^{(2)} = k$.

Así

$$L[k] = L\left[Y^{(2)}\right] = -ck \geq 0 > Y^{(2)}[\overline{a} - a_1 k - a_2\sigma^*(v)] \quad \text{en } \overline{\Omega}\times\Re$$

Por lo tanto $Y^{(2)}$ es una supersolución de (X).

(iii) Sean $\overline{u}, \overline{\overline{u}} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ solución de (X), dadas por (i), para $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ de (ii) se tendrá

$$Y^{(1)} \leq \overline{u} \leq \overline{\overline{u}} \leq Y^{(2)} \quad \text{en } \overline{\Omega}\times\Re.$$

Sea ahora z cualquier otra solución de (X) tal que $z \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ y $z > 0$ en $\Omega\times\Re$. Sea $u^{(2)}$ una constante positiva tal que

$$u_0^2 > Y^{(2)} \text{ y } u_0^{(2)} > \|z\|_\infty \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re$$

por ejemplo $u_0^{(2)} > \sup_{\overline{\Omega}\times[0,T]}\left\{Y^{(2)}, \|z\|_\infty\right\}$, se tiene entonces que

$$L\left[u_0^{(2)}\right] = -cu_0^2 \geq 0 \text{ pues } c \leq 0$$

Ahora

$$f\left((x,t), u_0^{(2)}\right) = u_0^{(2)}\left(\overline{a} - a_1 u_0^{(2)} - a_2\sigma^*(v)\right) \leq u_0^{(2)}\left(\overline{a} - a_1 Y^{(1)} - a_2\sigma^*(v)\right) < 0 < L[u_0^2]$$

Luego

$$\begin{cases} -L\left[u_0^{(2)}\right] + f((x,t), u_0^2) \leq 0 \quad \text{en } \Omega\times\Re \\ \left. u_0^{(2)} \right|_{\partial\Omega\times\Re} > 0 \geq 0 \end{cases}$$

entonces $u_0^{(2)}$ es una supersolución de (X).

Sea ahora $s > 0,$ tal que $s > 0$ y $s + \overline{a} - a_1 z - a_2 z - a_2\sigma^*(v) > 0$ en $\Omega\times\Re$, entonces

$$L[z]+sz=z(\overline{a}-a_1z-a_2\sigma^*(v))+sz=z(s+\overline{a}-a_1z-a_2\sigma^*(v))>0.$$

Como $\partial\Omega\times\Re$ tiene la propiedad de la esfera interior tangente, dado que $\partial\Omega\times\Re$ es de clase $C^{2+\alpha}$, entonces $\frac{\partial z}{\partial\vec{\eta}}<0$ en $\partial\Omega\times\Re$ entonces existe $\delta_1>0$ de manera que $0<\delta_1<\frac{\overline{a}-\lambda_1-a_2\sigma^*(v)}{a_1}$ incluso podemos seleccionar $\delta_1<\beta$ tal que

$$z-\delta_1\varphi_1>0.$$

Así tomando $u_0^{(1)}=\delta_1\varphi_1$, entonces en $\partial\Omega\times\Re$ se tiene

$$L\left[u_0^{(1)}\right]=\delta_1\lambda_1\varphi_1=u_0^{(1)}\lambda_1<u_0^{(1)}(\overline{a}-a_1\beta\varphi_1-a_2\sigma^*(v))$$
$$<u_0^{(1)}(\overline{a}-a_1\varphi_1\delta_1-a_2\sigma^*(v))=u_0^{(1)}\left(\overline{a}-a_1u_0^{(1)}-a_2\sigma^*(v)\right)$$

y $u_0^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0\leq 0.$

Luego $u_0^{(1)}$ es subsolución de (X) y se tiene

$$u_0^{(1)}>z \text{ en } \Omega\times\Re\,,\quad u_0^{(1)}<u^{(1)} \text{ en } \Omega\times\Re\,;\quad u_0^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$$

En resumen se tiene

$$u_0^{(1)}\leq z\leq u_0^{(2)} \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re \qquad (1)$$
$$u_0^{(1)}\leq u^{(1)}\leq\overline{u}\leq\overline{\overline{u}}\leq u^{(2)}\leq u_0^{(2)} \text{ en } \Omega\times\Re \qquad (2)$$

Como $u_0^{(1)}$ y $u_0^{(2)}$ son respectivamente subsolución y supersolución de (X) y $u_0^{(1)}\leq u_0^{(2)}$ en $\overline{\Omega}\times\Re$, entonces por la primera etapa existe $z^{(1)},z^{(2)}\in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\times\Re\right)$ soluciones de (X) tales que

$$u_0^{(1)}\leq z^{(1)}\leq z^{(2)}\leq u_0^{(2)} \text{ en } \Omega\times\Re \qquad (3)$$

Además por $(1),(2)$ y la parte uno de esta demostración

$$z^{(1)}\leq z\leq z^{(2)} \text{ en } \Omega\times\Re \qquad (4)$$
$$z^{(1)}\leq\overline{u}\leq\overline{\overline{u}}\leq z^{(2)} \text{ en } \Omega\times\Re \qquad (5)$$

y $z^{(1)},z^{(2)}$ cumplen

$$L\left[z^{(1)}\right]=z^{(1)}Q \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re$$
$$L\left[z^{(2)}\right]=z^{(2)}P \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re$$
$$z^{(1)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0, \qquad z^{(2)}\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$$

donde $P=\overline{a}-a_1z^{(2)}-a_2\sigma^*(v)$ y $Q=\overline{a}-a_1z^{(1)}-a_2\sigma^*(v)$ como $-a_1z^{(1)}\geq a_1z^{(2)}$ en $\Omega\times\Re$, $P\leq Q$ en $\Omega\times\Re$, luego por el teorema de comparación y como $z^{(1)},z^{(2)}>0$ no cambian de signo entonces $P\equiv Q$ en $\Omega\times\Re$, por lo tanto $z^{(1)}=z^{(2)}$ en $\overline{\Omega}\times\Re$ de esto, (4) y de (5) se tiene que

$$z=\overline{u}=\overline{\overline{u}} \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}\times\Re.$$

Esta única solución positiva en $\Omega\times\Re$ de (X) con $z\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ la denotamos $u(v)$ y es la solución deseada, quedando completa la demostración del lema.

□

§2. CONVERGENCIA MONÓTONA PARA ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO.

Aplicando directamente el lema 4. y resultados básicos en un artículo de L.Ortega sobre soluciones periódicas del problema de Dirichlet para ecuaciones parabólicas (ver $[18]$) presentamos los lemas siguientes

LEMA 5. Si $v_1, v_2 \in \mathbb{B}$ y $u(v_1), u(v_2)$ están dadas por el lema 4 y $v_1 \leq v_2$ entonces $u(v_1) \geq u(v_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $v_1, v_2 \in \mathbb{B}$ y $v_1 \leq v_2$ es fácil ver que $\sigma^*(v_1) \leq \sigma^*(v_2)$. Establezcamos ahora las siguientes notaciones

$$L_1[u] = L[u] + r_3 u$$
$$h_1[u] = u[\,\overline{a} - a_1 - a_2\sigma^*(v_1)] + r_3 u$$
$$h_2[u] = u[\,\overline{a} - a_1 - a_2\sigma^*(v_2)] + r_3 u,\ \ r_3 > 0$$

donde h_1 y h_2 son elegidos de manera que sean estrictamente crecientes en el intervalo $\left[\inf_{\overline{\Omega}\times\Re} Y^{(1)},\ \sup_{\overline{\Omega}\times\Re} Y^{(2)}\right]$ siendo $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ como en la segunda etapa de la demostración del lema 4.

Por la unicidad de $u(v_2)$, $u(v_2) > 0$ en $\overline{\Omega}\times\Re$ y por el lema 4 podemos construir sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$.

Antes de seguir es conveniente revisar el resultado básico que se encuentra en numeral 46 p.17.

Según este resultado s_1, q_1 son soluciones de

$$L_1[s_1] = h_1\left[Y^{(2)}\right], \qquad L_1[q_1] = h_2\left[Y^{(2)}\right] \qquad \text{en } \Omega\times\Re$$
$$s_1\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \qquad q_1\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$$

Siguiendo por recurrencia y usando el método de iteración s_{n+1} y q_{n+1} son las soluciones de los problemas

$$L_1[s_{n+1}] = h_1[s_n], \qquad L_1[q_{n+1}] = h_2[q_n] \qquad \text{en } \Omega\times\Re$$
$$s_{n+1}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \qquad q_{n+1}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$$

Dado que $\sigma^*(v_1) \leq \sigma^*(v_2)$, se tiene que

$$L_1[s_1 - q_1] = Y^{(2)}[\,\overline{a} - a_1 - a_2\sigma^*(v_1)] + r_3 Y^{(2)} - Y^{(2)}[\,\overline{a} - a_1 - a_2\sigma^*(v_2)] - r_3 Y^{(2)}$$
$$= Y^{(2)}[a_2\sigma^*(v_2) - a_2\sigma^*(v_1)] \geq 0 \quad \text{en } \overline{\Omega}\times\Re$$

Por el teorema del máximo para operadores de tipo parabólico se sigue que $s_1 \geq q_1$ en $\overline{\Omega}\times\Re$. Supongamos ahora que $s_k \geq q_k$, entonces

$$L_1(s_{k+1} - q_{k+1}) = h_1(s_k) - h(q_k) \geq h_1(q_k) - h_2(q_k)$$

la última desigualdad se sigue porque h_1 es estrictamente creciente en $\left[\inf_{\overline{\Omega}\times\Re} Y^{(1)},\ \sup_{\overline{\Omega}\times\Re} Y^{(2)}\right]$ y $Y^{(1)} \leq q_k \leq s_k \leq Y^{(2)}$.

Pero $h_1(q_k) - h_2(q_k) = a_2[\sigma^*(v_2) - \sigma^*(v_1)] \geq 0$ ya que se sabe que $\sigma^*(v_1) \leq \sigma^*(v_2)$, luego $L_1(s_{k+1} - q_{k+1}) \geq 0$ en $\overline{\Omega}\times\Re$ de donde por el teorema del máximo para operadores de tipo parabólico $s_{k+1} \geq q_{k+1}$en $\overline{\Omega}\times\Re$ además estas dos sucesiones convergen respectivamente a $u(v_1)$ y a $u(v_2)$ por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n - u(v_1)\|_{\infty} = 0, \text{ y }, \lim_{n\to\infty}\|q_n - u(v_2)\| = 0$$

de donde por el teorema de la convergencia monótona (puntual) se tiene lo deseado $u(v_1) \geq u(v_2)$.

□

LEMA 6. Existe una única solución en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ del problema

$$(XI) \qquad \begin{cases} L[u] = u[\overline{a} - a_1 u] \text{ en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

la cual es positiva en $\Omega \times \Re$ (esta solución será notada en lo que sigue por u_0)

DEMOSTRACIÓN: Es un corolario del lema 4. ya que $0 \in \mathbb{B}$ y $\sigma^*(v) = 0$, cuando $v = 0$ en $\overline{\Omega} \times \Re$.

□

Recordemos ahora que una función definida en $\overline{\Omega} \times [0,T]$ y con valores en $\Re$, es Hölder continua en $\Omega \times [0,T]$ con exponente α, $0 < \alpha < 1$ si la cantidad

$$H_\alpha(f) = \sup_{\substack{(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \\ (x_1,t_1) \neq (x_2,t_2)}} \frac{|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)|}{[\|x_1 - x_2\|^2 + |t_1 - t_2|]^{\alpha/2}}$$

es finita. En el espacio $C^\alpha(\overline{\Omega} \times [0,T])$ de las funciones Hölder continuas con exponente α, esta dotado de la norma

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + H_\alpha(u).$$

Veamos ahora el siguiente lema:

LEMA 7. $\displaystyle\lim_{\|v\|_{2+\alpha} \to 0} \|u(v) - u_0\|_{2+\alpha} = 0$

DEMOSTRACIÓN: Dado que

$$\|v\|_{2+\alpha} = \|v\|_\alpha + \sum_{i=1}^{N} \|D_i(v)\|_\alpha + \sum_{i,j=1}^{N} \|D_{i,j}(v)\|_\alpha + \|D_t(v)\|_\alpha$$

y como $\|v\|_{2+\alpha} \to 0$, entonces $\|v\|_\alpha \to 0$, por lo tanto $\|v\|_\infty \to 0$. Sea entonces $\epsilon > 0$ y tomando ϵ_0 de tal manera que $0 < \epsilon_0 < \min\{\gamma, \epsilon\}$ se tiene $\|v\|_\infty < \epsilon_0$ por construcción $\sigma^*(v) = v$ en $\Omega \times \Re$, luego $\|\sigma^*(v)\|_\infty = \|v\|_\infty$ por lo tanto

$$\lim_{\|v\|_\infty \to 0} \|\sigma^*(v)\|_\infty = 0.$$

Tomemos ahora una sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{B}$ al que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_\alpha = 0$ también se tiene

$$\|\sigma^*(v_n) - \sigma^*(v_m)\|_\infty < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

Sea ahora $\epsilon_2 > 0$ tal que $\epsilon_2 < \min\{\epsilon, \gamma\}$ existe $N_2 > 0$ tal que si $n > N_2$, $\|v_n\|_\alpha < \frac{\epsilon_2}{4} < \frac{\epsilon}{4}$ en particular si $n \geq N_2$, $\|v_n\|_\infty < \frac{\epsilon_2}{4} < \gamma$ y así $\sigma^*(v_n) = v_n$. Si tomamos $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ y para $n, m > N_3$ entonces

$$\|\sigma^*(v_n) - \sigma^*(v_m)\|_\alpha = \|\sigma^*(v_n) - \sigma^*(v_m)\|_\infty + H_\alpha(\sigma^*(v_n) - \sigma^*(v_m))$$
$$\leq \|\sigma^*(v_n)\|_\infty + \|\sigma^*(v_m)\|_\infty + \|v_n - v_m\|_\alpha < \tfrac{\epsilon}{2} + \|v_n\|_\infty + \|v_m\|_\infty < \epsilon.$$

Luego $\{\sigma^*(v_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $C^\alpha(\overline{\Omega}\times\Re)$, el cual es completo por lo tanto existe $\mu\in C^\alpha(\overline{\Omega}\times\Re)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|\sigma^*(v_n)-\mu\|_\alpha=0$, por consiguiente $\lim_{n\to\infty}\|\sigma^*(v_n)-\mu\|_\infty=0$.

Pero como $\lim_{n\to\infty}\|\sigma^*(v)\|_\infty=0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|\sigma^*(v_n)\|_\infty=0$. Dado que $\|v_n\|_\infty\to 0$ entonces se sigue que $\mu=0$ y así

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma^*(v_n)\|_\alpha=0 \text{ si } \|v_n\|_\alpha\to 0 \tag{2}$$

Pero por el lema 6, $u(0)=u_0$, por consiguiente si $v\in\mathbb{B}$

$$\|u(v)\|_\infty\le\|u_0\|_\infty \quad \text{en } \overline{\Omega}\times\Re.$$

Consideremos nuevamente cualquier sucesión $\{v_n\}$ en $\mathbb{B}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_\alpha=0$ y sea $\{v_{n_k}\}$ una subsucesión cualquiera de $\{v_n\}$. Sea $0<\alpha<\beta<1-\frac{N}{p}$ como para todo k se tiene

$$\|u(v_{n_k})-u_0\|_{1+\beta}\le\mathcal{C}\|L[u(v_{n_k})]-L[u_0]\|_\infty \tag{3}$$

entonces existe $\mathcal{C}_1>0$ tal que para todo k

$$\|u(v_{n_k})-u_0\|_{1+\beta}\le\mathcal{C}_1 \tag{4}$$

Por (4) y como $C^{1+\beta}(\overline{\Omega}\times\Re)\xrightarrow{\subseteq}C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ es completamente continua entonces $\{u(v_{n_k})\}$ tiene una subsucesión que también denotamos $\{u(v_{n_k})\}$ convergente a una función $w\in C^\alpha(\overline{\Omega}\times\Re)$ y si notamos

$$w_k=u(v_{n_k}),\text{ entonces } \lim_{k\to\infty}\|w_k-w\|_\alpha=0. \tag{5}$$

Es claro que existe una constante $K_4>0$ tal que para todo $k=1,2,3,\ldots$

$$\|v_{n_k}\|_\infty\le\|v_{n_k}\|_\alpha\le K_4 \tag{6}$$

Considerando la función constante $K_4\in\mathbb{B}$, entonces por el lema 5 se tiene que

$$\text{para todo } k=1,2,3,\ldots,\ w_k\ge u(k_4)>0 \text{ en } \Omega\times\Re \tag{7}$$

De (5) y (7) se sigue que

$$w>0 \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re \tag{8}$$

Además, como para todo $k=1,2,3,\ldots,\ w_k\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$ entonces

$$w\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0 \tag{9}$$

De (5) y (2) es sencillo ver que $\{w_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$, luego al ser éste un espacio de Banach, existe $w^{(1)}\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\left\|w_k-w^{(1)}\right\|_{2+\alpha}=0 \tag{10}$$

De (5) y (10) se sigue que

$$w\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re) \tag{11}$$

Como para todo $k=1,2,3,\ldots\ w_k$ satisface la siguiente ecuación

$$L[w_k]=w_k(\overline{a}-a_1w_k-a_2\sigma^*(v_{n_k})) \text{ en } \Omega\times\Re \tag{12}$$

tomando límite cuando $k\to\infty$, se tiene

$$w=u_0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}\times\Re \tag{13}$$

De (5) y (13), hemos probado que si $\{v_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{B}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_\alpha = 0$, cualquier subsucesión $\{u(v_{n_k})\}$ de $\{u(v_n)\}$ tiene a su vez cierta subsucesión también denotada $\{u(v_{n_k})\}$ que converge a u_0 en la norma de $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\|u(v_n) - u_0\|_{2+\alpha} = 0$$

□

LEMA 8. Existe $\lambda^{(2)}$ valor propio principal del problema

$$\begin{cases} L[u] = \lambda[b(x,t) - b_2u_0(x,t)]u(x,t) \quad \text{en } \ \Omega\times\Re \\ \quad u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0, \quad u>0 \ \text{ en } \ \Omega\times\Re \end{cases}$$

tal que $0<\lambda^{(2)}<1$; $\lambda^{(2)}$ es simple y su función propia correspondiente es única salvo por la norma.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $u_0(x,t)$ es la solución de la ecuación $L[u] = u(\overline{a} - a_1u)$, por los lemas $4.$ y $6.$ se sigue que u_0 es una función constante, por lo tanto tenemos

$$L[u_0] = \ -\mathcal{C}u_0 = u_0(\overline{a} - a_1u_0)$$

por lo tanto

$$u_0 = \tfrac{\overline{a}+\mathcal{C}}{a_1}$$

Por brevedad denotaremos $\overline{b} = b - b_2u_0$ para todo $(x,t)\in\overline{\Omega}\times\Re$ y definimos el siguiente operador

$$\Lambda : C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)\longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re) \tag{1}$$

mediante $\Lambda(v) = j(\overline{b}v)$ en $\overline{\Omega}\times\Re$, donde $j = i_0\circ(L)^{-1}$, además i_0 es la inclusión canónica de $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ en $C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ y

$$(L)^{-1} : C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)\longrightarrow C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re).$$

Como es sabido j es completamente continua. Ahora

$$L[u] = \lambda[b - b_2u_0]u = \lambda\big[b - b_2\tfrac{\overline{a}+\mathcal{C}}{a_1}\big]u = \lambda\Big[\tfrac{a_1b - ab_2 - b_2\mathcal{C}}{a_1} + \tfrac{ab_2\gamma_0}{a_1}\Big]u$$

así

$$\overline{b} = b - b_2u_0 = \tfrac{a_1b - ab_2 - b_2\mathcal{C}}{a_1} + \tfrac{ab_2\gamma_0}{a_1} = b^{(2)} + \tfrac{ab_2\gamma_0}{a_1}$$

Por la hipótesis general (2) se tiene que $b^{(2)}>0$, en esta forma

$$\Lambda(\mathbb{B})\subseteq\mathbb{B} \tag{2}$$

Definimos ahora un segundo operador para $v\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ por

$$\Lambda_1(v) = j\Big(\tfrac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|_\infty}v\Big) \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re \tag{3}$$

teniéndose que

$$\Lambda_1 : \mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B} \ \text{ y } \ \Lambda_1 \text{ es completamente continua} \tag{4}$$

Como $\Lambda(\varphi_0)\geq j\big(b^{(2)}\varphi_0\big) = b^{(2)}\frac{\varphi_0}{\lambda_1}$ y $-\varphi\notin\mathbb{B}$ por un teorema del análisis espectral tenemos la existencia de un vector propio $v_1\in\mathbb{B}$ y $\mu_2>0$ tal que

$$\Lambda(v_1) = \mu_2v_1 \ \text{ y } \ \mu_2 > \tfrac{b^{(2)}}{\lambda_1} \tag{5}$$

De aquí

$$L[v_1] = \lambda^{(2)}\overline{b}v_1 \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re \tag{6}$$

donde

$$\lambda^{(2)} = \tfrac{1}{\mu_2} \ \text{ y } \ 0<\lambda^{(2)}\leq\tfrac{\lambda_1}{b^{(2)}} \tag{7}$$

Análogamente se prueba que existen $v_2 \in \mathbb{B}$ y $\mu_3 > 0$ tales que

$$\Lambda_1(v_2) = \mu_3 v_2 \text{ y } \mu_3 \geq \frac{b^{(2)}}{\|\bar{b}\|_\infty \lambda_1} \tag{8}$$

De (8) y (3)

$$L[v_2] = \lambda^{(1)} \bar{b} v_2 \text{ en } \Omega \times \Re$$

de donde

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu_3 \|\bar{b}\|_\infty} \quad \text{y} \quad 0 < \lambda^{(1)} \leq \frac{\lambda_1}{b^{(2)}} \tag{9}$$

Tomando $P(x,t) = \lambda^{(2)} \bar{b}$ y $Q(x,t) = \lambda^{(1)} \bar{b}$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \Re$ tenemos de (6) y (9) que

$$\begin{cases} L[v_1] = v_1 P & \text{en } \Omega \times \Re & (10) \\ L[v_2] = v_2 Q & \text{en } \Omega \times \Re & (11) \end{cases}$$

Como además por (1) y (3) $\Lambda(v_1)\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0$, $\Lambda(v_2)\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0$ entonces $v_1\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0$ y $v_2\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0$, también $v_1, v_2 \in \mathbb{B}$ y al ser vectores propios $v_1 \not\equiv 0$ y $v_2 \not\equiv 0$ y $L[v_1] \geq 0$, $L[v_2] \geq 0$ en $\Omega \times \Re$ entonces por el teorema del máximo $v_1 > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $v_2 > 0$ en $\Omega \times \Re$.

(i) Si $\lambda^{(2)} \leq \lambda^{(1)}$ entonces $P \leq Q$ en $\Omega \times \Re$, luego por el teorema de comparación $P = Q$ en $\Omega \times \Re$, así $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}$

(ii) Si $\lambda^{(2)} > \lambda^{(1)}$, entonces $P \geq Q$ en $\Omega \times \Re$, por el teorema de comparación $P = Q$ y así $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}$ lo cual es contradictorio $(\rightarrow\leftarrow)$

Luego en total se debe tener que

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} \tag{12}$$

Por (9) y escogiendo $\|\bar{b}\|_\infty$ suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{\mu_3 \|\bar{b}\|_\infty} < \min\{1, \frac{\lambda_1}{b^{(2)}}\} \tag{13}$$

Entonces

$$0 < \lambda^{(2)} < 1 \tag{14}$$

Es claro que $\mathbb{B}$ es un cono reproductor, así que si $z \in \mathbb{B} - \{0\}$ entonces $\Lambda(z) > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $\Lambda(z)\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0$, como también $\Lambda(z) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ tenemos la existencia de $\rho_1, \rho_2 > 0$ tales que

$$\rho_1 v_1 > \Lambda(z) > \rho_2 v_1 \text{ en } \Omega \times \Re \tag{15}$$

De (15) se sigue que Λ es un operador v_1–positivo, entonces como además por (5) y (6) , $\lambda^{(2)}$ es simple y su función propia asociada, en $\mathbb{B}$ es única salvo la norma. Esto termina la prueba del lema 8.

□

§3. METODO DE BIFURCACIÓN GLOBAL PARA LAS SOLUCIONES.

Dedicamos este parágrafo a presentar la teoría de bifurcación encaminada a la solución final del problema (I).

DEFINICIÓN: Para cada $v \in \mathbb{B}$ consideremos el problema

$$L[v] = v[b - b_1 v - b_2 u(v)] \text{ en } \Omega \times \Re$$

donde $u(v)$ es tal que $L[u(v)][\overline{a} - a_1 u(v) - a_2 \sigma^*(v)]$.

Definimos ahora la siguiente truncación

$$\sigma^{**}(v)(x,t)=\begin{cases}\frac{b-b_2u_0}{b_1} & \text{si} \quad v(x,t)>\frac{b-b_2u_0}{b_1}\\ v(x,t) & \text{si} \quad v(x,t)\leq\frac{b-b_2u_0}{b_1}\end{cases}$$

Tenemos ahora

$$\begin{aligned}L[v]&=v[b-b_1\sigma^{**}(v)-b_2u(v)]\\&=v[b-b_2u_0-b_1\sigma^{**}(v)+b_2(u_0-u(v))]\end{aligned}$$

Sea como en el lema $8.$ $\Lambda(v)=j(\overline{b}v)$ donde

$j=i_0\circ(L)^{-1}$ y $\overline{b}=b-b_2u_0$.

Consideremos un nuevo operador dado por

$$G(v)=j[-b_1\sigma^{**}(v)v+b_2(u_0-u(v))v] \tag{1}$$

Definamos ahora

$$G_1(\lambda,v)=\lambda G(v)\ , \qquad \lambda\in[0,\infty) \tag{2}$$

y así

$$F_0(\lambda,v)=\lambda\Lambda(v)+G_1(\lambda,v) \tag{3}$$

LEMA $9.$ $(\lambda^{(2)},0)$ es un punto de bifurcación global por solución positiva del problema

$$v=F_0(\lambda,v)$$

DEMOSTRACIÓN: La ecuación $v=F_0(\lambda,v)$ es equivalente a la ecuación

$$L[v]=\lambda v[\overline{b}-b_1\sigma^{**}(v)+b_2(u_0-u(v))]$$

Como se vio en la prueba del lema 8, Λ es un operador completamente continuo, positivo (esto es $\Lambda(\mathbb{B})\subseteq\mathbb{B}$) y lineal.

Ahora como

$$\frac{\|b_2v(u_0-u(v))\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}\leq\frac{3b_2\|u_0-u(v)\|_{2+\alpha}\|v\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}$$

y por el lema 7, $\lim\limits_{\|v\|_{2+\alpha}\to0}\|u_0-u(v)\|_{2+\alpha}=0$, entonces

$$\lim_{\|v\|_{2+\alpha}\to0}\frac{\|b_2v(u_0-u(v))\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}=0 \tag{4}$$

Además, si $v\in\mathbb{B}$ y $\|v\|_{2+\alpha}\to0$, es claro que $\|\sigma^{**}(v)\|_{2+\alpha}\to0$, luego como

$$\frac{\|-b_1\sigma^{**}(v)v\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}\leq3b_1\|\sigma^{**}(v)\|_\alpha$$

entonces

$$\lim_{\|v\|_{2+\alpha}\to0}\frac{\|-b_1\sigma^{**}(v)v\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}=0 \tag{5}$$

Por el teorema de Schauder para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parábolico existe $K_0>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\|\lambda G(v)\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}&\leq\frac{K_0|\lambda|\|L(G(v))\|_\alpha}{\|v\|_{2+\alpha}}=\frac{K_0|\lambda|\|-b_1\sigma^{**}(v)v-b_2(u_0-u(v))v\|_\alpha}{\|v\|_{2+\alpha}}\\&\leq K_0|\lambda|\left(\frac{\|-b_1\sigma^{**}(v)v\|_\alpha}{\|v\|_{2+\alpha}}+\frac{\|b_2v(u_0-u(v))\|_\alpha}{\|v\|_{2+\alpha}}\right)\end{aligned}$$

Luego aplicando (4) y (5) tenemos que

$$\lim_{\|v\|_{2+\alpha}\to0}\frac{\|\lambda G(v)\|_{2+\alpha}}{\|v\|_{2+\alpha}}=0 \tag{6}$$

De (6) tenemos por lo tanto que

$$\left(\begin{array}{c}G_1(\lambda,v)=\mathfrak{o}(\|v\|_{2+\alpha}) \text{ cuando } \|v\|_{2+\alpha}\to0, \text{ uniformemente en } \lambda\\ \text{respecto a subconjuntos compactos de } [0,\infty)\end{array}\right) \tag{7}$$

De la definición de $\sigma^{**}(v)$ se sigue que

$$\|\sigma^{**}(v)-\sigma^{**}(v_0)\|_\infty < \|v-v_0\|_\infty \qquad (8)$$

Sea ahora $\{v_n\}$ una sucesión en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{2+\alpha}=0 \qquad (9)$$

Sea $w_k=v_{n_k}$ para $k=1,2,3,\ldots$ con $\{v_{n_k}\}$ cualquier subsucesión de $\{v_n\}$. Para cada n se tiene

$$L[u(v_n)]=u(v_n)(\overline{a}-a_1u(v_n)-a_2\sigma^*(v_n)) \quad \text{en} \quad \Omega\times\Re$$

Sea $0<\alpha<\beta<1-\frac{N}{P}$ para todo $k\in\mathbb{Z}^+$ se tiene:

$$\|u(w_k)(\overline{a}-a_1u(w_k)-a_2\sigma^*(w_k))\|_\infty \le (\overline{a}+a_1\|u_0\|_\infty+a_2\gamma)\|u_0\|_\infty=K_1.$$

Sabemos que existe $\mathrm{c}>0$ tal que $k\in\mathbb{Z}^+$

$$\|u(w_k)\|_{1+\beta}\le \mathrm{c}\|L(u(w_k))\|_\infty=\mathrm{c}\|u(w_k)(\overline{a}-a_1u(w_k)-a_2\sigma^*(w_k))\|_\infty$$

Así

$$\|u(w_k)\|_{1+\beta}\le \mathrm{c}K_{10}$$

Luego la sucesión $\{u(w_k)\}$ es acotada en $C^{1+\beta}(\overline{\Omega}\times\Re)$ y aplicando el hecho de que la inclusión canónica

$$C^{1+\beta}(\overline{\Omega}\times\Re)\xrightarrow{\subset}C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$$

es completamente continua, entonces la sucesión $\{u(w_k)\}$ contiene una subsucesión que denotaremos también $\{u(w_k)\}$ la cual converge en $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$, así existe $\varphi\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ que satisface

$$\lim_{k\to\infty}\|u(w_k)-\varphi\|_{1+\alpha}=0 \qquad (10)$$

Pero (10) implica que para todo k

$$u(w_k)=(L)^{-1}\left[u(w_k)\{\overline{a}-a_1u(w_k)-a_2\sigma^*(w_k)\}\right] \text{ en } \Omega\times\Re \qquad (11)$$

$$u(w_k)\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0 \qquad (12)$$

Entonces si $T:C^0(\overline{\Omega}\times\Re)\longrightarrow C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ es la extensión de $(L)^{-1}$ a $C^0(\overline{\Omega}\times\Re)$, de (11) y (12) se obtiene

$$u(w_k)=T[u(w_k)\{\overline{a}-a_1u(w_k)-a_2\sigma^*(w_k)\}] \text{ en } \Omega\times\Re.$$

Luego por la continuidad del operador T, obtenemos al tomar límite cuando $k\to\infty$ en $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$, que

$$\varphi=T[\varphi\{\overline{a}-a_1\varphi-a_2\sigma^*(v)\}] \text{ en } \Omega\times\Re$$

$$\varphi\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$$

y como $\varphi[\overline{a}-a_1\varphi-a_2\sigma^*(v)]\in C(\overline{\Omega}\times\Re)$, obtenemos de lo anterior que $\varphi\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$

$$\left\{\begin{array}{l} L[\varphi]=\varphi[\overline{a}-a_1\varphi-a_2\sigma^*(v)] \text{ en } \Omega\times\Re \\ \varphi\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Como es claro existe $K_8>0$ tal que para todo k, $w_k\le K_8$ en $\overline{\Omega}\times\Re$, entonces por el lema 5 del §2, para todo $(x,t)\in\Omega\times\Re$

$$u(w_k)(x,t)\ge u(K_8)(x,t)>0 \qquad (14)$$

luego $\varphi>0$ en $\Omega\times\Re$. De (13), (14) y el lema 4, necesariamente

$$\varphi=u(v) \qquad (15)$$

Se sigue de (10) y (15), en particular que

$$\lim_{k\to\infty}\|u(w_k)-u(v)\|_\infty=0$$

Por un resultado del análisis (a saber; si $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio métrico (E,d) y existe $\overline{a}\in E$ tal que toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ posee a su vez una subsucesión $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}$ convergente a $\overline{a}$, entonces $\{x_n\}$ converge a $\overline{a}$) y como $w_k=v_{n_k}$ y $\{v_{n_k}\}$ es cualquier subsucesión de $\{v_n\}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\|u(v_n)-u(v)\|_\infty=0$, por lo tanto

$$\lim_{\|s-v\|_{2+\alpha}\to 0}\|u(s)-u(v)\|_\infty=0 \tag{16}$$

De (8) tenemos que existe $\mathrm{c}>0$ tal que si $\|v-v_0\|_{2+\alpha}\to 0$,

$$\begin{aligned}\|j\circ(v\sigma^{**}(v)-v_0\sigma^{**}v_0)\|_{2+\alpha}&\le \mathrm{c}\|v\sigma^{**}(v)-v_0\sigma^{**}(v_0)\|_\infty\\ &=\mathrm{c}\|(v-v_0)\sigma^{**}(v)+v_0(\sigma^{**}(v)-\sigma^{**}(v_0))\|_\infty\\ &\le \mathrm{c}\Big(\tfrac{\|b-b_1u_0\|_\infty}{b_1}+\|v_0\|_\infty\Big)\|v-v_0\|_\infty\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{\|v-v_0\|_{2+\alpha}\to 0}\|j\circ(v\sigma^{**}(v)-v_0\sigma^{**}(v_0))\|_{2+\alpha}=0 \tag{17}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}&\|j\circ(vu(v)-u(v_0)v_0)\|_{2+\alpha}\le \mathrm{c}\|vu(v)-v_0u(v_0)\|_\infty\\ &=\mathrm{c}\|v(u(v)-u(v_0))+u(v_0)(v-v_0)\|_\infty\\ &\le \mathrm{c}(\|v\|_\infty\|u(v)-u(v_0)\|_\infty+\|u(v_0)\|_\infty\|v-v_0\|_\infty)\end{aligned}$$

Por (16) se tiene

$$\lim_{\|v-v_0\|_{2+\alpha}\to 0}\|j\circ(vu(v)-v_0u(v_0))\|_{2+\alpha}=0 \tag{18}$$

Además

$$\|j\circ(-vu_0+v_0u_0)\|_{2+\alpha}\le \mathrm{c}\|u_0\|_\infty\|v-v_0\|_\infty.$$

Así tenemos

$$\lim_{\|v-v_0\|_{2+\alpha}\to 0}\|j\circ(-vu_0+u_0v_0)\|_{2+\alpha}=0 \tag{19}$$

De (17), (18) y (19) obtenemos

$$\lim_{\|v-v_0\|_{2+\alpha}\to 0}\|G(v)-G(v_0)\|_{2+\alpha}=0 \tag{20}$$

ya que

$$\begin{aligned}&\|\lambda G(v)-\lambda' G(v_0)\|_{2+\alpha}=\|(\lambda-\lambda')G(v)+\lambda'(G(v)-G(V_0))\|_{2+\alpha}\\ &\le|\lambda-\lambda'|\|G(v)\|_{2+\alpha}+|\lambda'|\|G(v)-G(v_0)\|_{2+\alpha}\end{aligned} \tag{21}$$

y

$$\|(\lambda,v)-(\lambda',v_0)\|=\max\{|\lambda-\lambda'|,\|v-v_0\|_{2+\alpha}\}\to 0$$

(21) prueba que G_1 es continua considerada de $[0,\infty)\times\mathbb{B}$ en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$. Sea ahora $\{v_n\}$ acotada en $\mathbb{B}$ y $\{\lambda_n\}$ una sucesión acotada en $[0,\infty)$ entonces existe $K_9>0$ tal que para todo n

$$|\lambda_n|\ge K_9 \quad\text{y}\quad \|v_n\|_\alpha\ge K_9 \tag{22}$$

Considerando posibles casos se puede demostrar que para todo n

$$\left\{\begin{array}{l}\|\sigma^{**}(v_n)\|_{2+\alpha}<K_{10}\\ \text{donde } K_{10}=\frac{\|b-b_2u_0\|}{b_1}+K_9\end{array}\right\} \tag{23}$$

es fácil ver también que para todo n

$$\left\{\begin{array}{l}\|u(v_n)-u_0\|_{2+\alpha}\le K_{11}\\ \text{con } K_{11}=\mathrm{c}(2\overline{a}\|u_0\|_\infty+2a_1\|u_0^2\|_\infty+a_2\gamma\|u_0\|_\infty)\end{array}\right\} \quad (24)$$

De (23) y (24), tenemos que para todo n

$$\left\{\begin{array}{l}\|-b_1v_n\sigma^{**}(v_n)+b_2(u_0-u(v_n))\|_{2+\alpha}\le K_{12}\\ \text{con } K_{12}=3b_1K_9K_{10}+3b_2K_{11}K_9\end{array}\right\} \quad (25)$$

De (21) y (25), la definición de G_1, el hecho de que $j=i_0\circ(L)^{-1}$ es completamente continua y como para todo n

$$|\lambda_n|\|-b_1v_n\sigma^{**}(v_n)+b_2(u_0-u(v_n))v_n\|_{2+\alpha}\le K_9K_{12}$$

entonces la sucesión $\{G_1(\lambda_n,v_n)\}$ tiene una subsucesión convergente en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$ lo que acaba la prueba de que

$$\left\{\begin{array}{l}G_1:[0,\infty)\times\mathbb{B}\longrightarrow C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)\\ \text{es completamente continua}\end{array}\right\} \quad (26)$$

Además es claro que el único punto fijo de $\mathbb{B}$ en $G_1(0,\cdot)$ es

$$v=0. \quad (27)$$

También tenemos que si $(\lambda,v)\in(0,\infty)\times\mathbb{B}$ como

$$L[F_0(\lambda,v)]=\lambda\left[\overline{b}v-b_1\sigma^{**}(v)+b_2(u_0-u(v))\right]$$
$$=\lambda v[b-b_1\sigma^{**}(v)-b_2u(v)]\ge 0 \text{ en } \overline{\Omega}\times\Re$$

esto último se tiene dado que $0<v$ y por el lema 5, $u_0=u(0)>u(v)$ así $u_0-u(v)>0$ y también $(F_0(\lambda,v))\Big|_{\partial\Omega\times\Re}\equiv 0$ entonces por el principio del máximo para ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico

$$F_0(\lambda,v)\in\mathbb{B} \quad \text{si} \quad (\lambda,v)\in[0,\infty)\times\mathbb{B}.$$

De la definición del operador Λ en el lema 8, se sigue la existencia de $v_1\in\mathbb{B}-\{0\}$ y $\lambda^{(2)}\in(0,1)$ tales que

$$\Lambda(v_1)=\frac{1}{\lambda^{(2)}}v_1$$

entonces

$$\left(\lambda^{(2)}\right)^{-1} \text{ es valor propio del operador } \Lambda\Big|_{\mathbb{B}} \quad (28)$$

Además del lema 8.

$$\left(\lambda^{(2)}\right)^{-1} \text{ es simple} \quad (29)$$

de aquí y de (7), (26), (27) y (28), obtenemos lo deseado en el lema 9.

□

§4. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (I)

Dedicamos este parágrafo a la demostración del teorema principal y que constituye el problema objetivo del presente ensayo.

TEOREMA: Existen $u,v\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$, con (x,t) en $\Omega\times\Re$, tales que (u,v) es solución del problema (I)

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 1 del §1, es suficiente probar que existen funciones $\underline{u},\overline{u},\underline{v},\overline{v}\in C^2(\overline{\Omega}\times\Re)$ tales que satisfacen el problema (VI) y que $\underline{u},\underline{v}>0$ en $\Omega\times\Re$.

Sea $\overline{u} = \alpha_1\theta$ y $\overline{v} = \beta_1\theta$ dadas por el lema 3 del §1. Ahora, por el lema 9 del § 3, existe $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $[0,\infty)$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{B}$, tales que para todo n, $v_n \not\equiv 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sigma_n - \lambda^{(2)}\right| = 0 \quad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\|v_n - 0\|_{2+\alpha} = 0 \tag{1}$$

además para todo n, $v_n = F_0(\sigma_n, v_n)$ o sea para todo $n, v_n \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times\Re)$, y para todo n

$$L[v_n] = \sigma_n v_n(b - b_1\sigma^{**}(v_n) - b_2 u(v_n)) \text{ en } \Omega\times\Re \tag{2}$$

Por (1) y dado que $0 < \lambda^{(2)} < 1$ podemos escoger η_0 suficientemente grande, tal que $0 < \sigma_{\eta_0} < 1$ y $v_{\eta_0}(x,t) < \frac{b - b_2 u_0}{b_1}$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega}\times\Re$, así

$$\left\{\begin{array}{l} L[v_{\eta_0}] = \sigma_{\eta_0}(b - b_1 v_{\eta_0} - b_2 u(v_{\eta_0})) \text{ en } \Omega\times\Re \\ \quad v_{\eta_0}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Pero como $b - b_1 v_{\eta_0} - b_2 u(v_{\eta_0}) \geq 0$ en $\overline{\Omega}\times\Re$, pues dado que $b_1 v_{\eta_0} \leq b - b_2 u_0$ entonces $b - b_2 u_0 - b_1 v_{\eta_0} \geq 0$ y por el lema 5. como $0 < v_{\eta_0}$ entonces $u(0) = u_0 > u(v_{\eta_0})$ así $u_0 - u(v_{\eta_0}) > 0$, por otra parte

$$b - b_1 v_{\eta_0} - b_2 u(v_{\eta_0}) = b - b_2 u_0 - b_1 v_{\eta_0} + b_2(u_0 - u(v_{\eta_0})) \geq 0$$

También $\sigma_{\eta_0} v_{\eta_0} \geq 0$ en $\overline{\Omega}\times\Re$, además $\overline{v} \in \dot{C}^1(\overline{\Omega}\times\Re)$ y $\frac{\partial\overline{v}}{\partial\vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega\times\Re$ (ya que $L[\overline{v}] = \beta_1 L[\theta] = \beta(m^* a - a_1\theta) \leq 0$ en $\partial\Omega\times\Re$ y $-\overline{v}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$ y $-\overline{v} < 0$ en $\Omega\times\Re$; luego se puede aplicar el teorema A_1, que mostraremos en el apéndice y como $v_{\eta_0} \in \dot{C}(\Omega\times\Re)$ (en realidad $v_{\eta_0} \in \dot{C}^{2+\alpha}(\Omega\times\Re)$) se puede demostrar que existe $\epsilon_* > 0$ tal que si $\|w - v_{\eta_0}\|_1 < \epsilon_*$ y $w \in C^1(\Omega\times\Re)$, entonces $w > 0$ en $\Omega\times\Re$. Supongamos también ahora que η_0 es suficientemente grande de manera que $\|v_{\eta_0}\| < \epsilon_*$ (esto se puede hacer, ya que para todo n

$$\|v_n\|_{1+\alpha} \leq \mathrm{c}\|L[v_n]\|_\infty \leq \mathrm{c}|\sigma_n|\|v_n\|_\infty\,(b + b_1\|v_n\|_\infty + b_2\|u(v_n)\|_\infty)$$

y como $\|v_n\|_\infty \to 0$ (cuando $n\to\infty$) ya que $\|v_n\|_{2+\alpha} \to 0$ (cuando $n\to\infty$) y también $\|u(v)\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u(0)\|_\infty = \|u_0\|_\infty$ por los lemas 6 y 7 de §2.)

Por lo tanto, como $\overline{v} - v_{\eta_0} \in C^1(\Omega\times\Re)$ y

$$\|(\overline{v} - v_{n_0}) - \overline{v}\|_1 = \| - v_{\eta_0}\|_1 < \epsilon_*$$

entonces

$$\overline{v} - v_{\eta_0} > 0 \text{ o sea } \overline{v} > v_{\eta_0} \text{ en } \Omega\times\Re. \tag{4}$$

Definamos ahora $\underline{v} \equiv v_{\eta_0}$ y $\underline{u} = u(v_{\eta_0}) = u(\underline{v})$. Por (3) tenemos que, como $0 < \sigma_{\eta_0} < 1$

$$\begin{aligned} L[\underline{v}] = L[v_{\eta_0}] &= \sigma_{\eta_0} v_{\eta_0}(b - b_1 v_{\eta_0} - b_2 u(v_{\eta_0})) \leq v_{\eta_0}(b - b_1 v_{\eta_0} - b_2 u(v_{\eta_0})) \\ &= \underline{v}(b - b_1\underline{v} - b_2 u(\underline{v})) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\{\begin{array}{l} L[\underline{v}] \leq \underline{v}(b - b_1\underline{v} - b_2\underline{u}) \\ \quad \underline{v}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Como también $\underline{v} \equiv v_{\eta_0} \in \mathbb{B} - \{0\}$, se tiene de (3) y por el principio del máximo que:

$$\underline{v} > 0 \text{ en } \Omega \times \Re \qquad (6)$$

También por el lema 4.

$$\underline{u} = u(\underline{v}) > 0 \text{ en } \Omega \times \Re \qquad (7)$$

y por (4)

$$\overline{v} \geq \underline{v} \qquad \text{en } \overline{\Omega} \times \Re \qquad (8)$$

Veamos ahora que $\underline{u} \leq \overline{u}$, aplicando el lema $4.$, tenemos

$$L[\overline{u}] = \overline{u}(m^*a - a_1\overline{u} - a_2\overline{v}) \geq \overline{u}(2a - a_1\overline{u} - a_2\overline{v}) = \overline{u}(a - a_1\overline{u} + a - a_2\overline{v})$$

Pero, como $a_2\beta_1\theta \leq a_2\beta_1\frac{m^*a}{a_1}$, tenemos

$$a - a_2\overline{v} = a - a_2\beta_1\theta \geq a - \frac{a_2\beta_1}{a_1}m^*a = a - \frac{a_2(a_1^2 - a_1b_2)}{a_1b_1 - a_2b_2}\frac{m^*a}{a_1}$$
$$= a - \frac{a_2(a_1 - b_2)}{a_1b_1 - a_2b_2}m^*a = a - \tau a = a(1 - \tau)$$

Pero

$$1 - \frac{\lambda_1}{a} > \tau > 0 \text{ entonces } 1 - \tau > \frac{\lambda_1}{a} > 0$$

Luego

$$a - a_2\overline{v} > 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \Re$$

Por lo tanto $L[\overline{u}] \geq \overline{u}(a - a_1\overline{u})$ en $\Omega \times \Re$ y también $\overline{u}\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0$, así $\overline{u}$ es supersolución del problema (XI) y como se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $a < \delta < \frac{\overline{a} - \lambda_1}{a_1}$ y $\delta\varphi_0 < \overline{u}$ en $\Omega \times \Re$ siguiéndose del lema 6 y la prueba del lema 4 que

$$\delta\varphi_0 \leq u_0 \leq \overline{u} \text{ en } \overline{\Omega} \times \Re$$

en particular $u_0 \leq \overline{u}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$.

Pero por el lema $5.$ y como $\underline{v} \in \mathbb{B}$, $u(\underline{v}) \leq u(0) \equiv u_0$ en $\overline{\Omega} \times \Re$; luego en total

$$\underline{u} = u(\underline{v}) \leq \overline{u} \text{ en } \overline{\Omega} \times \Re \qquad (9)$$

Ahora, por el lema 3 tenemos

$$L[\overline{v}] = \overline{v}(m^*a - b_1\overline{v} - b_2\overline{u}) \quad \text{en } \Omega \times \Re$$

pero $m^*a \geq b$ entonces

$$L[\overline{v}] \geq \overline{v}(b - b_1\overline{v} - b_2\overline{u}) \text{ en } \overline{\Omega} \times \Re \qquad (10)$$

Además, sabemos que

$$L[\overline{u}]) = \overline{u}[m^*a - a_1\overline{u} - a_2\overline{v}] \text{ en } \Omega \times \Re \qquad (11)$$

También

$$\overline{v} = \beta_1\theta = \frac{a_1^2 - a_1b_2}{a_1b_1 - a_2b_2}\theta = \frac{a_1 - b_2}{a_1b_1 - a_2b_2}a_1\theta \underset{(1)}{\leq} \frac{a_1 - b_2}{a_1b_1 - a_2b_2}m^*a = \frac{a\tau}{a_2} \underset{(2)}{\leq} \frac{a}{a_2}\gamma_0 \leq \frac{a}{a_2}\gamma_0 + \underline{v}$$

Luego $\overline{v} < \frac{a}{a_2}\gamma_0 + \underline{v}$ en $\Omega \times \Re$

((^{1}) $\theta(m^*a - a_1\theta) = L[\theta] > 0$ entonces $m^*a - a_1\theta \geq 0 \Leftrightarrow a_1\theta \leq m^*a$

(^{2}) ya que $a - \lambda_1 > a\gamma_0 > a\tau$)

y así: $a_2\overline{v} < a\gamma_0 + a_2\underline{v}$, esto nos da

$$a_2(\overline{v} - \underline{v}) < a\gamma_0 \quad \text{en } \Omega \times \Re \qquad (12)$$

Pero $a\gamma_0 = a - \overline{a}$ luego $a_2(\overline{v} - \underline{v}) < a - \overline{a}$, de donde

$$\overline{a} - a_2\underline{v} \leq a - a_2\overline{v} \quad \text{en } \Omega \times \Re \qquad (13)$$

Como $a\gamma_0 < a - \lambda_1 < a = 2a - a < m^*a - a$, entonces de (12) obtenemos

$$a_2(\overline{v} - \underline{v}) \leq m^*a - a \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \qquad (14)$$

lo cual equivale a que

$$m^*a - a_2\overline{v} \geq a - a_2\underline{v} \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{15}$$

De (11) y (15) se sigue que

$$L[\overline{u}] \geq \overline{u}(a - a_1\overline{u} - a_2\underline{v}) \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \tag{16}$$

Ahora por la elección de $v_{\eta_0} < \gamma$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, tenemos que $\sigma^*(v_{\eta_0}) = v_{\eta_0}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, luego $\underline{u} = u(\underline{v})$, satisface el lema $4.$ del §1, así

$$L[\underline{u}] = \underline{u}[\overline{a} - a_1\underline{u} - a_2\underline{v}] \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re$$

aplicando (13) obtenemos

$$L[\underline{u}] \leq u(a - a_1\underline{u} - a_2\overline{v}) \tag{17}$$

De $(5), (10), (16), (17)$ y el lema 1 del §1 existen $u, v \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)$ tales que (u, v) es solución del problema (I) y $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$ en $\overline{\Omega} \times \Re$. Además de (6) y (7) se sigue que $u, v > 0$ en $\Omega \times \Re$.

□

§5. **APLICACION.**

Es un hecho "notabilísimo" el considerar el problema parabólico con condiciones de frontera dado por

$$(XII) \begin{cases} L[u] = u[a(x,t) - a_1u(x,t) - a_2v(x,t)] \text{ en } \Omega \times \Re \\ L[v] = v[b(x,t) - b_1v(x,t) + b_2u(x,t)] \text{ en } \Omega \times \Re \\ u\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \ , \ v\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\Re^N$, $N \geq 2$, $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b_i} \ \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right)$$

$a(x,t) > 0, b(x,t) > 0, a_{ij} = a_{ji}, \widetilde{b_i}\ , c(\ \leq 0)$ son funciones periódicas con período T, además a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes positivas.

El modelo de demostración utilizado para hallar la solución del problema (I), es el mismo en su integridad que para hallar la solución al problema (XII), solamente basta con leves modificaciones en las hipótesis generales y en la definición de algunas truncaciones utilizadas y curiosamente la solución tiene la misma forma, solamente cambiando el operador parabólico por elíptico. Más aún el modelo utilizado es esencialmente el mismo que usó el profesor Victor Manuel Ardila de la Peña en su magistral intervención en el seminario de Ecuaciones diferenciales parciales en la Universidad Nacional de Colombia; de octubre a noviembre de 1990.

APENDICE

A continuación se presentan los dos resultados básicos utilizados en el modelo de demostración del problema (I) para el caso de operadores de tipo parabólico.

TEOREMA A_1. Existe $\lambda_1 \in \Re, \lambda_1 > 0$ y una función $\varphi \in \mathbb{E}$ con las siguientes propiedades

(i) $L[\varphi] \equiv \lambda_1 \varphi$ en $\Omega \times \Re$

(ii) $\varphi > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $\frac{\partial \varphi}{\varphi \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$

(iii) Si $v \in \mathbb{E}$, $v \not\equiv 0$ en $\Omega \times \Re$, $\widehat{\lambda}_1 > 0$ entonces $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$

y existe una constante $\widehat{k} \neq 0$ de manera que $v = \widehat{k}\varphi$.

En la demostración de este teorema se usan cinco lemas los cuales son presentados a continuación y están demostrados despues de la demostración del teorema A_1.

LEMA 1. Si $v \in C^1(\overline{\Omega} \times \Re) = \{f \in C^1(\overline{\Omega} \times \Re)/f = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \Re\}$, $v > 0$ en $\Omega \times \Re$, $v(x, t+T) \equiv v(x,t)$, $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $w \in C^1(\overline{\Omega} \times \Re)$, $w(x,t+T) \equiv w(x,t)$ y $\|v - w\|_1 < \epsilon$ entonces $w > 0$ en $\Omega \times \Re$ (La demostración se hace por contradicción usando el principio del máximo).

LEMA 2. Si $R = (L)^{-1} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$, $f \in K$, $f \not\equiv 0$ donde

$$\mathbb{F} = \{u \in C(\overline{\Omega} \times \Re)/\, u(x,t+T) = u(x,t),\, u \in C^{\alpha}(\Omega \times [0,T]\,)\}$$

con norma $\|\cdot\|_{\alpha}^{\overline{\Omega} \times [0,T]}$

$$K = \left\{ f \in \mathbb{F}/f \geq 0 \text{ en } \overline{\Omega} \times \Re \text{ y } f\Big|_{\partial\Omega \times \Re} \equiv 0 \right\}$$

y $v = R(f)$ entonces $v > 0$ en $\partial\Omega \times \Re$ y $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$.

LEMA 3. Si con Λ denotamos al siguiente conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in \Re/\lambda > 0, \text{ existe } f \in K \text{ tal que } f \not\equiv 0 \text{ y } f(x,t) \leq \lambda R(f)(x,t) \text{ para todo } (x,t) \in \Omega \times \Re\}$$

entonces el conjunto Λ no es vacío.

LEMA 4. Si $\lambda_1 = \inf \Lambda$ entonces $\lambda_1 > 0$

LEMA 5. Si $f \in K$, $f \not\equiv 0$ y $f(x,t) \leq \lambda_1 R(f)(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \Re$ entonces $f \equiv \lambda_1 R(f)$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA A_1: Denotemos $\widehat{\mathbb{E}}$ al subespacio

$$\widehat{\mathbb{E}} = \{f \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega} \times \Re)/f(x,t+T) \equiv f(x,t)\}$$

del espacio

$$\overline{\mathbb{E}} = \{f \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times \Re)/f(x,t+T) \equiv f(x,t)\},$$

donde $\beta \in (\alpha, 1)$.

Por ser $\lambda_1 = \inf \Lambda$, y como $\Lambda \neq \emptyset$ existe una sucesión $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ en Λ y una sucesión $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ en K tal que $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \lambda_1$, $\|w_m\|_{\infty} = 1$ y $w_m \leq \lambda_m R(w_m)$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, para todo entero $m \geq 1$. Sabemos que si $u \in \mathbb{E}$ es tal que $L[u] = f$ para f dada en $\mathbb{F}$, existe una constante $k_2 > 0$ tal que $\|u\|_{1+\beta} \leq k_2 \|L[u]\|_{\infty}$, por lo tanto para esta misma k_2 se tiene

$$\|R(w_n)\|_{1+\beta} \leq k_2 \|w_m\|_\infty \leq k_2,$$

para todo entero positivo m.
Por ser la inyección $i : \widehat{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathbb{F}$ compacta existe una subsucesión de $\{R(w_m)\}_{m=1}^{\infty}$ denotada también $\{R(w_m)\}_{m=1}^{\infty}$ la cual converge a una función $v \in \mathbb{F}$ en la $\mathbb{F}$-norma.
De la desigualdad $w_m(x,t) \leq \lambda_m R(w_m)(x,t)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \Re$ obtenemos:

$$1 = \|w_m\|_\infty \leq \lambda_m \|R(w_m)\|_\infty,$$

para todo entero positivo. Tomando límite en la anterior desigualdad:

$$1 = \lim_{m\to\infty} \|w_m\|_\infty \leq \lim_{m\to\infty} \|R(w_m)\|_\infty \lambda_m = \lambda_1 \|v\|_\infty$$

De esta desigualdad obtenemos que $v \not\equiv$. Además

$$v = \lim_{m\to\infty} R(w_m) \leq \lim_{m\to\infty} \lambda_m R[R(w_m)] = \lambda_1 R(v).$$

Por el lema $5.$ y esta última desigualdad concluimos que

$$v \equiv \lambda_1 R(v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re$$

La última parte del teorema es consecuencia directa de un teorema de comparación de Sturm. Al número λ_1 se le denomina el valor propio principal de L.
□

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Por hipótesis $L[v] \equiv f \geq 0$ en $\Omega \times \Re$ y $v \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \Re$, por el principio del máximo para ecuaciones de tipo parabólico v no puede tener un mínimo menor o igual a cero en $\Omega \times \Re$, por lo tanto $v > 0 \, en \, \Omega \times \Re$. Por este último hecho y el lema $1.$, $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}$ en $\partial\Omega \times \Re$.
□

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Por el principio del máximo $R(1) \equiv f \in K$ y $f \not\equiv 0$. Denotemos con $z \equiv R(f)$. Por el lema 2, $z > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$. Por estas últimas desigualdades y el lema 1, existe $\epsilon > 0$ tal que si $w \in C^1(\overline{\Omega} \times \Re)$ y $w(x,t+T) \equiv w(x,t)$ entonces $w > 0$ en $\Omega \times \Re$, con la única condición que $\|z - w\|_1 < \epsilon$.
Tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\|z - (z - \delta f)\|_1 = \delta \|f\|_1 < \epsilon$$

esta desigualdad por lo dicho anteriormente implica que $z - \delta f > 0$ en $\Omega \times \Re$, esto es

$$f(x,t) \leq \tfrac{1}{\delta} z(x,t) = \tfrac{1}{\delta} R(f)(x,t)$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \Re$ por lo tanto $\frac{1}{\delta} \in \Lambda$.
□

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4. Para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $f \in K$ tal que $f \not\equiv 0$ y

$$0 \leq f(x,t) \leq \lambda R(f)(x,t) \;\; \text{en} \;\; \Omega \times \Re$$

Por el lema 2 y el hecho de que $L : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es uno a uno y sobre, para cada $f \in \mathbb{F}$ existe $u \in \mathbb{E}$ tal que $L[u] = f$ y existen constantes $k_1 > 0, k_2 > 0$ tales que

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq k_1 \|L[u]\|_{\mathbb{F}} \;\; \text{y} \;\; \|u\|_{1+\beta} \leq k_2 \|L[u]\|_\infty$$

obtenemos

$$0 < \|R(f)\|_\infty \leq \|R(f)\|_{1+\beta} \leq k_2\|f\|_\infty \leq k_2\lambda\|R(f)\|_\infty$$

y de esta desigualdad $\lambda \geq \frac{1}{k_2} > 0$, para $\lambda \in \Lambda$, por lo tanto $\lambda_1 \geq \frac{1}{k_2}$

□

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5. Supongamos que $f \in K$, $f \not\equiv 0$ y

$$f(x,t) \leq \lambda_1 R(f)(x,t) \qquad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \Re$$

Por el lema $2.$, $v \equiv R(f) > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$. Demostraremos a continuación que $z = \lambda_1 v - f \equiv 0$. Sabemos que

$$\lambda_1 R(f) - f = \lambda_1 v - f \equiv z \geq 0 \text{ en } \Omega \times \Re$$

Si $z \not\equiv 0$ entonces por el lema $2.$, $R(z) > 0$ en $\Omega \times \Re$ y $\frac{\partial R(z)}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$. Por estas últimas desigualdades y el lema 1, existe $\delta^* > 0$, $\delta^* < \lambda_1$ tal que

$$R(z) - \delta^* R(v) > 0 \text{ en } \Omega \times \Re$$

esto es ;

$$0 < R(z) - \delta^* R(v) = [\lambda_1 R(v) - R(f)] - \delta^* R(v)$$
$$= (\lambda_1 - \delta^*)R(v) - R(f) = (\lambda_1 - \delta^*)R(v) - v$$

de donde;

$$v \leq (\lambda_1 - \delta^*)R(v), \; v \in K, v \not\equiv 0$$

por lo tanto $\lambda_1 - \delta^* \in \Lambda$ ($\rightarrow\leftarrow$). Esta contradicción demuestra que

$$0 \equiv z = \lambda_1 v - f \equiv \lambda_1 R(f) - f \text{ en } \Omega \times \Re$$

□

TEOREMA A_2 (**DE COMPARACIÓN**) Supóngase que $u, v \in \mathbb{E}$, $u \not\equiv 0, v \not\equiv 0, P, Q$ son funciones definidas y acotadas en $\overline{\Omega} \times \Re$, $P(x,t+T) = P(x,t)$, $Q(x,t+T) = Q(x,t)$. Si $L[u] \equiv Pu$ en $\Omega \times \Re$, $L[v] \equiv Qv$ en $\Omega \times \Re$ y $P \leq Q$ en $\Omega \times \Re$ entonces

(i) v cambia de signo en $\Omega \times \Re$, o

(ii) $P \equiv Q$ en $\Omega \times \Re$ y existe una constante γ tal que $v \equiv \gamma u$.

DEMOSTRACIÓN: Elijamos una constante $k > 0$ tal que $k + p > 0$ en $\Omega \times \Re$. Supongamos que v no cambia de signo, podemos suponer $v \geq 0$ en $\overline{\Omega} \times \Re$. Por hipótesis tenemos la siguiente desigualdad

$$L[v] + kv = (k + Q)v \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re$$

Por ser $v \not\equiv 0, v \geq 0$ en $\overline{\Omega} \times \Re$, por la desigualdad anterior y el principio del máximo para ecuaciones de tipo parabólico obtenemos que $v > 0$ en $\overline{\Omega} \times \Re$. Por este último hecho y el lema 2 del teorema A_1, $\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} < 0$ en $\partial\Omega \times \Re$. Esto implica la existencia de $\epsilon > 0$ tal que si

$$w \in C^1(\overline{\Omega} \times \Re), \qquad w(x,t+T) \equiv w(x,t), \; w\Big|_{\partial\Omega\times\Re} \equiv 0 \text{ y } \|v - w\| < \epsilon$$

entonces

$$w > 0 \qquad\qquad \text{en} \qquad \Omega \times \Re$$

Tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\delta\|u\|_1 < \epsilon$ entonces

$$\|v - (v - \delta u)\|_1 = \delta\|u_1\| < \epsilon$$

por lo tanto

$$v - \delta u > 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re.$$

Denotemos con

$$\gamma = \sup\{c \in \Re / v - cu > 0 \text{ en } \Omega \times \Re\}$$

Por ser $u \not\equiv 0$ podemos suponer que existe $(x_0, t_0) \in \Omega \times \Re$ tal que $u(x_0, t_0) > 0$, de hecho esto implica que $0 < \gamma < \infty$. Además

$$v - \gamma u \geq 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \Re$$

y

$$(L + k)[v - \gamma u] \geq (Q - P)v + (P + k)(v - \gamma u) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \Re \qquad (1)$$

Las desigualdades (1) implican la existencia de un punto $(x_1, t_1) \in \Omega \times \Re$ tal que

$$(v - \gamma u)(x_1, t_1) \equiv 0. \qquad (2)$$

En caso contrario la desigualdad (1) y el argumento anterior cambiando v por $v - \gamma u$ implicaría la existencia de un número $\delta_0 > 0$ tal que $(v - \gamma u) - \delta_0 u > 0$ en $\Omega \times \Re$, contrario a la definición de γ. Por la desigualdad (1), (2) y el principio del máximo para ecuaciones de tipo parabólico

$$v - \gamma u \equiv (v - \gamma u)(x_1, t_1) = 0$$

esto es, $v \equiv \gamma u$ y $P = Q$

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach Space*. Ann. Math. Pure Appl. 93 (1972),231-247.

[2] Amann, H. and Hess, P., *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*. Proc. Royal Soc. Edinburgh 84A (1979), 145-151.

[3] Ardila V.M: *Notas del seminario de Ecuaciones diferenciales parciales*. Bogotá Universidad Nacional. Octubre-Noviembre 1990.

[4] Avner Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* , Prentice Hall, Inc., Englewood, Cliffs, N . J ., 1964.

[5] Berger, M.S. and Podolak, E.,*On the solutions of a non-linear Dirichlet problem,* Indiana Univ. Math. J., 24 (1975) 837-846,

[6] Bluman, G.W. and Cole, J.D., *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag

[7] Chorin, A.J., Hughes.T, McCraken, M., and Marsden J., *Product Formulas and Numerical Algorithms*. Pure and Applied Mathematics (volume XXXI, Number 2, March 1978)

[8] Dancer, E.N., *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J.Math.Pure. et Appl. 57 (1978), 351.366.

[9] Dieudonné J., *Foundations of modern analysis*. Academic Press.

[10] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*.

Prentice-Hall,inc 1964
[11] Fritz, J., *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag
[12] Horváth, J., *Topological vector spaces and distributions*. Volume I. Addison-Wesley Publishing Company
[13] Kazdan, J. L. and Warner, F. W., *Remars on some Quasilinear Elliptic Equations, Comm*. Pure and Appl. Math. XXVIII (1975), 567-597.
[14] Lang, S., *Analysis II*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
[15] O.A. Ladyzenskaja, V.A., Solonnikov and N.N. Uralceva, U. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968 (Translated from the Russian by S. Smith).
[16] Lazer, A., *Some remarks on periodic solutions of parabolic Differential equations,* En Dynamical Systems II. Edited by A.R. Bednarek, L. Cesari, Academic Press (1980), 228-246.
[17] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
[18] Ortega, L., *Sobre las soluciones periódicas el problema de Dirichlet para ecuaciones de tipo parabólico*. Revista Colombiana de Matemáticas (volumen XIX septiembre-diciembre 1985. Ns.3-4)
[19] Ortega, L., *Soluciones periódicas de un sistema de reacción difusión.* Memorias tercer simposio Colombiano de Análisis Funcional. Medellin, noviembre de 1985.
[20] Ortega, L., *Bifurcación. Notas del seminario de ecuaciones Diferenciales parciales*. Bogotá Universidad Nacional. 1988
[21] Persek, S.C. and Hoppensteadt, F.C., *Iterated Averaging Methods for Systems of Ordinary Differential Equations with a Small Parameter*. Pure and Applied Mathematics (volume XXXI, Number 2, March 1978)
[22] Rabinowitz, P.H., *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems*. Pure and Applied Mathematics (volume XXXI, Number 2, March 1978)
[23] Rendón, A.L., Análisis funcional. Cursos virtuales de la U. Nal. de Colombia. www.unal.edu.co
[24] Shapiro, H.N., and Sparer, G.H., *Power-Quadratic Diophantine Equations and Descent*. Pure and Applied Mathematics (volume XXXI, Number 2, March 1978)
[25] Villa, B., *Notas del seminario de ecuaciones diferenciales parciales.* Bogotá, Universidad Nacional, 1989.

ДАЖЙЛЛЭЮ

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. En esta forma presento un ensayo de un tipo de problema que se puede catalogar como una investigación, propuesta en este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada.

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora quien leyó todos los originales y cuidó del buen manejo del lenguaje español.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com