

APORTES

Elementos en OPERADORES AUTOADJUNTOS de segundo orden

José Darío Sánchez Hernández
Bogotá - Colombia. junio - 2006
danojuanos@hotmail.com
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com

El presente cursillo tiene por objeto el estudio del problema de Sturm–Liouville, el cual es una herramienta básica de la matemática, con un gran número de problemas en ecuaciones diferenciales parciales, los cuales se resuelven con su ayuda. También el problema de Sturm–Liouville es básico en mecánica cuántica, en el estudio de la ecuación de Schrödinger y en otros campos de la Física.

1. PROBLEMAS DE CONTORNO DE SEGUNDO ORDEN

Se considerará el siguiente problema

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ m_1 y(a) + n_1 y'(a) + p_1 y(b) + q_1 y'(b) = h_1 \\ m_2 y(a) + n_2 y'(a) + p_2 y(b) + q_2 y'(b) = h_2 \end{cases} \quad (1)$$

donde $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ y se supone que $a_0 \in C^1([a,b])$, $a_1, a_2 \in C([a,b])$ y $a_0(x) \neq 0$ si $x \in [a,b]$. Salvo mención de lo contrario, suponemos $f \in C([a,b])$.

Las consideraciones de contorno se pueden escribir matricialmente como sigue :

$$\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Merecerán especial atención los siguientes casos particulares :

$$\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{bmatrix}$$

que son condiciones separadas o de Sturm y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que son condiciones periódicas. Como se verá, estos dos casos particulares tienen propiedades interesantes y además aparecerán

con frecuencia al resolver los problemas de ecuaciones en derivadas parciales por el método de Fourier.

Cuando $h_1 = h_2 = 0$, se dirá que se trata del problema de contorno con condiciones homogéneas.

La primera cuestión que se plantea es la existencia y unicidad de soluciones del problema de contorno (1). Téngase en cuenta que se trata de un problema *GLOBAL*, es decir la solución ha de estar definida en todo el intervalo $[a, b]$ y las condiciones se dan en los dos extremos.

Sin embargo, en este caso la respuesta es una cuestión de Álgebra Lineal elemental y representa un modelo muy interesante de argumentar: "La reducción de la demostración de existencia a la prueba de unicidad para un problema asociado". Este es el método que se usa en las aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius, en la discusión de un sistema lineal y tiene extensiones a la teoría de ecuaciones integrales y contextos más generales. Nos referiremos a estos tipos de resultados como a los *Teoremas de Alternativa*.

Por brevedad vamos a usar la siguiente notación

$$\tilde{L}(y)(x) \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

$$U(y) \equiv \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix}$$

Con esta notación podemos formular el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1. *Sea el problema*

$$\begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = f(x) \\ U(y) = h \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2)$$

y el problema homogéneo asociado

$$\begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = 0 \\ U(y) = 0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3)$$

Entonces se verifica una de las dos alternativas siguientes:

i- (2) *tiene solución única.*

ii- (3) *tiene solución no trivial.*

DEMOSTRACION. Toda solución de la ecuación $\tilde{L}(y(x)) = f(x)$ se escribe como

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + v(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

donde $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base del espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2 / \tilde{L}(y) = 0\} \quad \text{y} \quad L(v) = f(x).$$

Por ser lineales las condiciones de contorno se tiene

$$U(y) = c_1U(\phi_1) + c_2U(\phi_2) + U(v)$$

Entonces para que (2) tenga solución única cualquiera que sea $h \in \mathbb{R}^2$ se ha de tener

$$\text{rang}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = 2$$

Si

$$\text{rang}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2$$

(3) tiene solución distinta de la trivial.

□

Nótese que como aplicación del teorema de Rouché–Frobenius, si

$$\text{rang}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2$$

el problema (2) tiene solución, y en este caso no es única, si verifica

$$\text{rang}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = \text{rang}(U(\phi_1), U(\phi_2), h - U(v)).$$

Para mayor información sobre la alternativa de Rouché–Frobenius los invitamos a leer el Apéndice I del libro *Análisis Matemático*, de Rey Pastor–Calleja–Trejo Volumen III ([14])

Otro punto de vista interesante, el cual sugiere los anteriores resultados, es el siguiente: Consideremos

$$\mathcal{E} = \{ \phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) / U(\phi) = 0 \}$$

es decir, las funciones con dos derivadas continuas, las cuales satisfacen las condiciones de contorno. Entonces el OPERADOR DIFERENCIAL \tilde{L} puede verse como la aplicación

$$\tilde{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

lineal y uno a uno, pues se supone que el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial.

Pero se puede mostrar que definiendo

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{E}$$

por

$$\mathcal{G}(f(x)) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt$$

donde $G(x, t)$ es una función de Green [4] dada por

$$G(x, t) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + k(x, t)$$

y

$$\begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < t \\ \frac{\phi_1(t) \phi_2(x) - \phi_1(x) \phi_2(t)}{a_0(t) W(\phi_1, \phi_2)(t)} & \text{si } t \leq x \leq b \end{cases}$$

se tiene $\tilde{L}\mathcal{G}(f(x)) = f(x)$, luego \mathcal{G} es la aplicación inversa de \tilde{L} . Además la unicidad de soluciones implica también que

$$\mathcal{G}\tilde{L}(U(x)) = U(x)$$

Esta algebraización del problema será útil. Para que así sea, damos al espacio \mathcal{E} de funciones continuas una NORMA parecida a la de \mathbb{R}^n , en el sentido de que es inducida por un producto escalar. Más exactamente, si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definimos el producto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt$$

entonces la norma asociada

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$$

La única propiedad que requiere alguna demostración no obvia es la propiedad triangular de la norma, la cual está basada en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se obtiene a continuación

LEMA 1.2. (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARTZ) *En el espacio \mathcal{E} se verifica la desigualdad siguiente:*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \| f \|_2 \| g \|_2 .$$

DEMOSTRACION: Sea $x, \theta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$0 \leq \| f - xe^{i\theta}g \|_2^2 = \langle f - xe^{i\theta}g, f - xe^{i\theta}g \rangle = \| f \|_2^2 - 2\Re[xe^{-i\theta}\langle f, g \rangle] + x^2 \| g \|_2^2$$

Tomando $\theta = \arg\langle f, g \rangle$ se tiene

$$0 \leq \| f - xe^{i\theta}g \|_2^2 = \| f \|_2^2 - 2x|\langle f, g \rangle| + x^2 \| g \|_2^2$$

en consecuencia el polinomio de segundo grado debe ser positivo o cero, es decir

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \| f \|_2^2 \| g \|_2^2$$

como se quería demostrar.

□

La desigualdad triangular se obtiene por el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \| f+g \|_2^2 &= \| f \|_2^2 + 2\Re\langle f, g \rangle + \| g \|_2^2 \leq \| f \|_2^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \| g \|_2^2 \\ &\leq \| f \|_2^2 + 2 \| f \|_2 \| g \|_2 + \| g \|_2^2 = (\| f \|_2 + \| g \|_2)^2 \end{aligned}$$

Además la desigualdad de Cauchy-Schwartz permite establecer las propiedades de la aplicación \mathcal{G} que se usarán como por ejemplo, se verifica que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\| \mathcal{G} f \|_2 \leq c \| f \|_2 , \quad f \in \mathcal{C}([a,b])$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \| \mathcal{G} f \|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b G(x,t) f(t) dt \right|^2 dx \leq \int_a^b \left\{ \left(\int_a^b |G(x,t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \right\} dx \\ &= \left(\int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 dt dx \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

Tomando $c = \left(\int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 dt dx \right)^{1/2}$, se obtiene lo deseado.

□

2. EL OPERADOR AUTOADJUNTO DE SEGUNDO ORDEN

Examinemos en detalle un problema de la teoría general de valores propios o de autovalores de un operador especial el cual, sin lugar a dudas, constituye una de las teorías más profundas y ricas de la matemática. Con tal propósito es útil introducir la noción de ecuación diferencial autoadjunta.

DEFINICION 2. 1. Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se dice una FORMA AUTOADJUNTA si y solamente si se tiene

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad x_1 < x < x_2$$

donde $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en (x_1, x_2) y $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son todas funciones definidas en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Este diseño el cual nos proponemos, de forma autoadjunta, es suficientemente general y cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden puede tomar la forma autoadjunta la cual constituye una motivación para el siguiente numeral.

2.1. FORMA AUTOADJUNTA ASOCIADA A UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN.

Considérese la ecuación diferencial lineal estándar

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0(x) + \lambda]y = 0$$

donde $A_2 \in C^1([a, b])$ y $A_1, A_0 \in C([a, b])$, $A_2(x) \neq 0$. Estamos interesados en hallar una función $g \in C^1([a, b])$ de tal manera que se tenga

$$g(x)\{A_2(x)y'' + A_1(x)y' + [A_0(x) + \lambda]y\} \equiv \{p(x)y'\}' + [q(x) + \lambda r(x)]y$$

La función $g(x)$ es llamada "FACTOR INTEGRANTE" y por lo tanto debe esperarse que satisfaga al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} g(x)A_2(x) &= p(x) \\ g(x)A_1(x) &= p'(x) \\ g(x)(A_0(x) + \lambda) &= q(x) + \lambda r(x) \end{aligned}$$

es decir, se debe tener que

$$[g(x)A_2(x)]' = g(x)A_1(x)$$

lo cual es lo mismo que

$$g'(x)A_2(x) + g(x)A_2'(x) = g(x)A_1(x)$$

de donde se obtiene que

$$g'(x) = \frac{g(x)[A_1(x) - A_2'(x)]}{A_2(x)}$$

Cualquier solución no nula de esta ecuación diferencial nos sirve como factor integrante; así resolvemos la ecuación diferencial para $g(x)$ como sigue:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{A_1(x) - A_2'(x)}{A_2(x)} = \frac{A_1(x)}{A_2(x)} - \frac{A_2'(x)}{A_2(x)}$$

Integrando se obtiene

$$\ln g(x) + \ln A_2(x) = \int \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt$$

o en forma equivalente se tiene

$$\ln A_2(x) g(x) = \int \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt$$

de donde

$$A_2(x) g(x) = \exp\left\{\int \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt\right\}$$

El factor integrante deseado será dado por

$$g(x) = \frac{1}{A_2(x)} \text{ext} \left\{ \int^x \frac{A_1(t)}{A_2(t)} dt \right\} .$$

EJEMPLO 1. Hallar la forma autoadjunta asociada a la siguiente ecuación

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 ,$$

Aquí

$$A_2(x) = x, A_1(x) = 1 - x, A_0(x) = 0$$

El factor integrante estará dado por

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1-x}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln g(x) = - \int^x dt = -x$$

así ,

$$g(x) = e^{-x}$$

Ahora tenemos

$$p(x) = g(x) A_2(x) = xe^{-x}$$

$$q(x) = g(x) A_0(x) = 0$$

$$r(x) = g(x) = e^{-x}$$

La forma autoadjunta deseada será

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = (xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0 .$$

EJEMPLO 2. Hallar la forma autoadjunta asociada a la siguiente ecuación

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0$$

Se tiene

$$A_2(x) = x^2, A_1(x) = x, A_0(x) = -n^2$$

El factor integrante debe ser tal que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} - \frac{2x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Integrando

$$\ln g(x) = \ln x^{-1} \Leftrightarrow g(x) = x^{-1}$$

Ahora

$$p(x) = g(x) A_2(x) = x^2x^{-1} = x$$

$$q(x) = g(x) A_0(x) = -\frac{n^2}{x}$$

$$r(x) = g(x) = x^{-1}$$

La forma autoadjunta asociada será :

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = (xy')' + (\lambda x - \frac{n^2}{x})y = 0 .$$

EJEMPLO 3. Hallar la forma autoadjunta asociada a la siguiente ecuación

$$x^2(x^2 + 1)y'' + 2x^3y' + \lambda y = 0, \quad x > 0 .$$

Aquí tenemos

$$A_2(x) = x^2(x^2 + 1), A_1(x) = 2x^3, A_0(x) = 0$$

El factor integrante se halla así :

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x^3}{x^2(x^2+1)} - \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2}$$

Integrando se tiene

$$\ln g(x) = \int^x \frac{2t}{t^2+1} dt - \int^x \frac{4t^3+2t}{t^4+t^2} dt = \ln(x^2+1) - \ln(x^4+x^2)$$

Así $g(x) = \frac{1}{x^2}$. La forma autoadjunta asociada esta dada por

$$x^2(x^2 + 1)y'' + 2x^3y' + \lambda y = [(x^2 + 1)y']' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0 .$$

□

Puesto que muchas de las discusiones que siguen están centradas alrededor de formas autoadjuntas, es notacionalmente conveniente introducir un operador diferencial (donde $D = d/dx$)

$$L = D[p(x)D] + q(x) \tag{4}$$

llamado “ OPERADOR AUTOADJUNTO ”. En términos de L , podemos expresar una ecuación diferencial lineal homogénea autoadjunta en la siguiente forma compacta

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0$$

En lo sucesivo, usaremos el símbolo L exclusivamente para denotar a la forma compacta (4) del operador diferencial autoadjunto.

3. SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Iniciamos esta sección presentando una definición básica en el estudio de la teoría que nos proponemos desarrollar a lo largo de ésta y las próximas secciones.

DEFINICION 3. 1. *Un sistema de Sturm-Liouville es una forma autoadjunta*

$$\frac{d}{dx} [p(x)\frac{dy}{dx}] + [\lambda p(x) + q(x)]y = 0$$

junto con condiciones de contorno, las cuales deben cumplir las soluciones; por ejemplo como

$$y(a) = y(b) = 0 .$$

Esta definición nos permite establecer una clasificación en la clase de los sistemas de Sturm-Liouville según el tipo de condiciones de contorno; las cuales previamente se han determinado sobre el operador L y en lo que sigue se estudiarán en detalle algunos de los sistemas de Sturm-Liouville más conocidos por la gran variedad de aplicaciones que de ellos se obtienen.

3.1. SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE SIMÉTRICOS.

El operador de Sturm-Liouville L tiene muchas propiedades; una de ellas es la de ser simétrico y se presenta de la siguiente manera.

DEFINICION 3. 2 . *Un operador autoadjunto L se dice SIMÉTRICO en el intervalo $[x_1, x_2]$ si y sólo si*

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) dx = 0 \tag{5}$$

para cualesquier par de funciones $u, v \in C^2([a,b])$ las cuales satisfacen condiciones de contorno predeterminadas asociadas con L .

NOTA: A problemas de valores propios, para los cuales el operador L es simétrico, serán también referidos en la literatura como a problemas autoadjuntos. Así, un problema de autovalores puede ser un operador autoadjunto pero no un problema autoadjunto. Puesto que ésta terminología puede prestarse a confusión. Tenemos que adoptar el uso de operador simétrico en lugar de problema autoadjunto, el cual tiene en cierto sentido, el mismo de la teoría de las matrices, cuando se refiere a una matriz especial, la cual posee propiedades análogas a estas que se están discutiendo.

Aunque la definición 3.2 se refiere a una propiedad del operador L , posteriormente hallamos que esta propiedad es relativamente restringida a clases de condiciones de contorno predeterminadas sobre el operador L . En estas condiciones es posible que un operador dado L sea simétrico con un conjunto de condiciones de contorno pero no con otro, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. Determinar para cual conjunto de condiciones de contorno el operador autoadjunto $L = D^2$ es simétrico en $[0,1]$

- (a) $y(0) = 0, y(1) = 0$
- (b) $y(0) - y(1) = 0, y'(1) = 0$

SOLUCION : Sustituyendo $L = D^2$ en la integral de la definición 3.2 y usando integración por partes, hallamos que

$$\int_0^1 [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)] dx = u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \Big|_0^1 =$$

$$= [u(1)v'(1) - v(1)u'(1)] - [u(0)v'(0) - v(0)u'(0)] .$$

Por las condiciones de contorno en (a), se sigue que u y v satisfacen $u(0) = v(0) = 0$ y $u(1) = v(1) = 0$. Por lo tanto el lado derecho de la anterior integral es nulo y concluimos que $L = D^2$ es *SIMETRICO* en este caso.

En el caso de (b), las condiciones de contorno conducen a $u(0) - u(1) = 0, v(0) - v(1) = 0$ y $u'(1) = v'(1) = 0$. Basándose en estas relaciones, la anterior integral se reduce a

$$\int_0^1 [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)] dx = v(0)u'(0) - u(0)v'(0)$$

Puesto que el lado derecho de esta última expresión no necesariamente es cero; deducimos que $L = D^2$ no es *SIMETRICO* en este caso.

LEMA. 3.3 . (IDENTIDAD DE LAGRANGE). Si $L = D[p(x)D] + q(x)$ está definido en el intervalo $[x_1, x_2]$ y si u y v son funciones cualesquiera en $C^2([x_1, x_2])$, entonces

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} [p(x)W(u,v)(x)] \tag{6}$$

donde $W(u, v) = uv' - u'v$ es la función Wronskiano.

DEMOSTRACION : Como $L = D[p(x)D] + q(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u \frac{d}{dx}(pv') + uqv - v \frac{d}{dx}(pu') - vqu = \\ &= \frac{d}{dx}(pv' u - pu' v) = \frac{d}{dx} [p(x)W(u,v)(x)] \end{aligned}$$

Lo cual se deseaba probar.

□

Basados en la identidad de Lagrange, hallamos que

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} [p(x)W(u,v)(x)] dx$$

de lo cual deducimos que

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) dx = p(x)W(u,v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{7}$$

Nos referiremos a (7) como a la fórmula de Green, la cual es un tipo de versión unidimensional del teorema de Green en el plano, del cálculo avanzado. Ambas, la identidad de Lagrange y la fórmula de Green, son fundamentales en el estudio general de los problemas con valores de contorno.

TEOREMA. 3.4. *Un operador autoadjunto $L = D[p(x)D] + q(x)$ es un operador simétrico en el intervalo $[x_1, x_2]$ si y sólo si*

$$p(x)W(u,v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

para funciones u y $v \in C^2([x_1, x_2])$ y además cumpliendo condiciones de contorno predeterminadas sobre el operador L .

La demostración de éste teorema es una simple aplicación de la formula de Green.

3.2. PROPIEDADES DE UN OPERADOR AUTOADJUNTO SIMETRICO.

En seguida establecemos que si un operador L dado, es simétrico, entonces existen varias propiedades importantes consecencialmente asociadas con los autovalores y las autofunciones de tal operador.

Quizas la más importante de estas propiedades es la **ORTOGONALIDAD** de las funciones propias o de las autofunciones. Pero primero precisemos la noción de autofunción y autovalor del operador L .

DEFINICION 3.5. *Una solución **no trivial** de un sistema de Sturm-Liouville es llamada **autofunción** y el correspondiente λ es llamado **autovalor** . A cada autofunción también se dice **pertenecer** a su autovalor. El conjunto de todos los autovalores de un sistema de Sturm-Liouville se le llama el **ESPECTRO** del sistema.*

Como ya lo hemos comentado en la primera sección, el espacio funcional \mathcal{E} esta provisto de un producto interno \langle , \rangle y se nos permite hablar de ortogonalidad.

DEFINICION. 3.6. *Si f y g son funciones integrables en un intervalo (x_1, x_2) , entonces decimos que ellas son **ortogonales** en este intervalo si y sólo si*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) dx = 0 \tag{8}$$

Decimos que f y g son ortogonales con respecto a una función de peso $r(x) > 0$ si y sólo si

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) f(x) g(x) dx = 0 \tag{9}$$

También se dice en el caso (9) que f y g son $r(x)$ -ortogonales.

NOTA : El intervalo de ortogonalidad en la definición 3.6 puede ser, en algunos casos, cerrado o infinitamente extendido en ambos extremos.

EJEMPLO 1. Las funciones $f(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$ y $g(x) = \cos x$ son ortogonales en el intervalo $(-\pi, \pi)$ con función de peso $r(x) = 1$.

En efecto usando la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

EJEMPLO 2. Demuéstrese que $f(x) = 1$ y $g(x) = 1 - x$ son ortogonales en $(0, \infty)$ con función de peso $r(x) = e^{-x}$.

Para mostrarlo, usando integración por partes, se halla

$$\int_0^{\infty} e^{-x} (1 - x) dx = -(1 - x)e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 - 1 = 0$$

consiguiéndose lo deseado.

En el teorema que sigue se afirma la ortogonalidad de un conjunto de autofunciones $\{\phi_n(x)\}$ de un sistema de Sturm–Liouville.

TEOREMA 3.7 (STURM-LIOUVILLE) *Sea L un operador simétrico en el intervalo $[x_1, x_2]$ asociado con la ecuación propia*

$$L[y] + \lambda r(x) y = 0, \quad x_1 < x < x_2$$

Si λ_n y λ_k son dos autovalores distintos, de L , con correspondientes autofunciones $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ respectivamente, entonces $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ son $r(x)$ -ortogonales, es decir

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_n(x) \phi_k(x) dx = 0, \quad n \neq k$$

DEMOSTRACION: Las funciones propias $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ satisfacen las relaciones

$$L[\phi_n(x)] = -\lambda_n r(x) \phi_n(x)$$

$$L[\phi_k(x)] = -\lambda_k r(x) \phi_k(x)$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones diferenciales por $\phi_k(x)$ y la segunda por $\phi_n(x)$, restando las ecuaciones resultantes e integrando sobre el intervalo de interés, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \{ \phi_k(x) L[\phi_n(x)] - \phi_n(x) L[\phi_k(x)] \} dx = (\lambda_k - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_n(x) \phi_k(x) dx$$

A causa de que L es simétrica, se sigue de la definición 3.2, que la integral en el lado izquierdo es cero y por lo tanto

$$(\lambda_k - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_n(x) \phi_k(x) dx = 0$$

Por hipótesis, $\lambda_n \neq \lambda_k$; así decimos que la integral es nula y el teorema queda mostrado.

□

Previamente hemos supuesto que todos los autovalores del operador L son reales, siempre y cuando el operador sea simétrico también en este caso las autofunciones son reales. Se demostrará sin embargo esta afirmación en el próximo teorema.

TEOREMA 3.8 . *Los autovalores de un operador simétrico son todos reales.*

DEMOSTRACION : Supóngase que existe algún autovalor complejo λ_k con respecto a una autofunción $\phi_k(x)$, es decir

$$L[\phi_k(x)] + \lambda_k r(x) \phi_k(x) = 0$$

Puesto que el operador L está formado de funciones reales, su conjugado complejo \bar{L} es igual a L. Tomando el conjugado complejo a los dos lados, se obtiene

$$\bar{L}[\phi_k(x)] + \bar{\lambda}_k r(x) \overline{\phi_k(x)} = \bar{L}[\phi_k(x)] + \bar{\lambda}_k r(x) \overline{\phi_k(x)} = 0$$

Se sigue ahora que $\phi_k(x)$ y $\overline{\phi_k(x)}$ corresponden a autovalores diferentes, λ_k y $\bar{\lambda}_k$ respectivamente, y por lo tanto son necesariamente ortogonales debido a la simetría del operador L. Esto indica que

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \phi_k(x) \overline{\phi_k(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} r(x) |\phi_k(x)|^2 dx = 0$$

pero puesto que el integrando es positivo, esta integral jamás es cero, con lo cual obtenemos una contradicción. Nuestra afirmación de que existe un autovalor complejo es falsa y el teorema está demostrado.

□

Aunque el teorema 3.8 , afirma que todos los autovalores de un operador simétrico son reales, no garantiza la existencia de algún autovalor. El siguiente teorema se muestra con la ayuda del teorema espectral y aquí no la damos.

TEOREMA 3.9 . *Los autovalores de un operador simétrico forman una sucesión infinita ordenados en magnitud tal que :*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

y donde $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

4. SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE REGULARES.

Muchos de los problemas de autovalores estudiados tienen un remoto rango de simplicidad o de separabilidad con respecto a las condiciones de contorno. Problemas de este tipo son caracterizados por

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0 \quad x_1 < x < x_2$$

$$B_1[y] \equiv a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_2) = 0, \quad (a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0) \quad (10)$$

$$B_2[y] \equiv a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) = 0, \quad (a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$$

donde $L = D[p(x)D] + q(x)$. Cualquier problema de autovalores perteneciente a esta clase general es llamado un *SISTEMA STURM-LIOUVILLE REGULAR*.

Estas condiciones de frontera homogéneas para la regularidad, son de tres tipos distintos y en cualquiera de los puntos extremos del intervalo puede tomar una de las siguientes formas :

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y' &= 0 \\ hy + y' &= 0 \quad (h \text{ es una constante}) \end{aligned}$$

Estas condiciones son llamadas de primer, segundo y tercer tipo, de condiciones de contorno. Cada uno de estos tipos de condiciones de contorno corresponden a diferentes tipos de condiciones físicas en los puntos extremos. Algunas de estas condiciones físicas se presentan por ejemplo en la obtención de la ecuación de onda.

Para demostrar que el operador asociado con un sistema de Sturm–Liouville es simétrico, consideremos dos funciones u y v de clase C^2 las cuales satisfacen condiciones de contorno del tipo (10).

En $x = x_1$, esto implica

$$a_{11}u(x_1) + a_{12}u'(x_1) = 0$$

$$a_{11}v(x_1) + a_{12}v'(x_1) = 0$$

pero puesto que a_{11} y a_{12} no pueden ser simultáneamente cero, por definición, se supone que anulan el determinante de los coeficientes, es decir

$$\begin{vmatrix} u(x_1) & u'(x_1) \\ v(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) \\ u'(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = W(u,v)(x_1) = 0.$$

Del mismo modo para la condición de frontera en $x = x_2$, podemos aplicar un argumento análogo para mostrar que $W(u,v)(x) = 0$. Así tenemos demostrado que

$$p(x)W(u,v)(x)|_{x_1}^{x_2} = 0$$

y por el teorema 3.4, se sigue que L es simétrico.

Por la regularidad del sistema de Sturm–Liouville, se tiene que para un operador simétrico, los autovalores y las autofunciones de tal sistema tienen las importantes propiedades establecidas en los teoremas 3.4, 3.6 y 3.7. En resumen tenemos el siguiente resultado para estos sistemas.

TEOREMA 4.9. *Los autovalores de un sistema de Sturm-Liouville regular son simples, es decir solamente una autofunción corresponde a cada autovalor.*

DEMOSTRACION: Supongamos que $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ son funciones propias correspondientes al mismo autovalor λ_n . En $x = x_1$, cada autofunción debe satisfacer las condiciones de contorno predeterminadas; así que

$$a_{11}\phi_n(x_1) + a_{12}\phi_n'(x_1) = 0$$

$$a_{11}\phi_k(x_1) + a_{12}\phi_k'(x_1) = 0$$

Puesto que a_{11} y a_{12} no pueden ser cero simultáneamente, en los extremos del intervalo solución, se exige que el determinante de los coeficientes debe ser nulo, y así (como arriba)

$$W(\phi_n, \phi_k)(x_1) = 0.$$

Si el Wronskiano de dos soluciones, de una ecuación diferencial, es nulo, en un punto del intervalo solución; por el principio de prolongamiento de identidades para funciones continuas, se sigue que él debe ser cero en todo el intervalo. Por lo tanto, $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ son proporcionales (linealmente dependientes), y representan a la misma autofunción.

□

4.1. SISTEMAS DE STURM-LIOUVILLE PERIODICOS

La segunda mayor clase de problemas de autovalores que consideramos son aquellos de la forma

$$L[y] + \lambda r(x) = 0, \quad x_1 < x < x_2$$

$$y(x_1) = y(x_2), \quad y'(x_1) = y'(x_2)$$

Donde $L = D[p(x)D] + q(x)$ y donde $p(x_1) = p(x_2)$. Tales problemas son llamados sistemas de Sturm-Liouville *PERIODICOS*.

Dejamos al lector curioso la demostración de que éste operador L , así definido, es simétrico para esta clase de condiciones de contorno.

La primera diferencia de los sistemas de Sturm-Liouville periódicos con los otros es que los autovalores no son necesariamente simples, como se ilustra en el siguiente ejemplo

EJEMPLO: En un instante particular de tiempo, la deflexión transversal de una membrana vibrante circular centrada en un punto fijo, está relacionada por las soluciones de la autoecuación

$$y'' + \lambda y = 0, \quad -\pi < \theta < \pi$$

donde $y = y(\theta)$ es una función del ángulo polar θ . Para asegurar que la deflexión quede semivaluada conforme a consideraciones físicas, las condiciones de contorno impuestas son periódicas y dadas por

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

"Queremos" determinar los posibles modelos de deflexión.

SOLUCION : Aquí $p(\theta) = 1$, así $p(-\pi) = p(\pi)$. Cuando $\lambda = 0$, la solución general de la ecuación diferencial es dada por

$$y = c_1 + c_2\theta$$

Teniendo en cuenta las condiciones periódicas, debemos verificar que

$$y(-\pi) - y(\pi) = -2c_2\pi = 0$$

$$y'(-\pi) - y'(\pi) = c_2 - c_2 = 0$$

lo cual implica que $c_2 = 0$, mientras que c_1 queda libre. Así

$$\lambda_0 = 0, \quad \phi_0(\theta) = 1$$

constituyendo una pareja autovalor autofunción. Para $\lambda = k^2 > 0$, la solución general toma la forma familiar

$$y = c_1 \cos k\theta + c_2 \sen k\theta$$

En esta ecuación y por las condiciones de contorno

$$c_1 \sen k\pi = 0, \quad c_2 \sen k\pi = 0$$

Por lo tanto, para $k = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) vemos que ambas constantes c_1 y c_2 permanecen arbitrarias. Concluimos por lo tanto, que para cada autovalor $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ corresponden dos autofunciones, las cuales en el caso general pueden ser escritas como

$$\phi_n(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sen n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y

$$\psi_n(\theta) = c_3 \cos n\theta + c_4 \sen n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4 son constantes tales que $\phi_n(\theta)$ y $\psi_n(\theta)$ son linealmente independientes.

En ocasiones seleccionamos combinaciones lo más simple posible, escogiendo

$$c_2 = c_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = c_4 = 1$$

obtenemos las autofunciones linealmente independientes

$$\begin{aligned} \phi_n(\theta) &= \cos n\theta, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ \psi_n(\theta) &= \sen n\theta, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Más aún con esta elección de las constantes se tiene que las autofunciones halladas son ortogonales, pues

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sen n\theta \, d\theta = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En general, si para un autovalor simple λ_n se puede hallar dos autofunciones linealmente independientes $\phi_n(\theta)$ y $\psi_n(\theta)$, es posible (en un intervalo específico) determinar combinaciones lineales de $\phi_n(\theta)$ y $\psi_n(\theta)$ para hallar nuevas autofunciones que sean ortogonales.

Como un comentario final debemos notar que: Como un sistema de Sturm–Liouville periódico es ante todo una ecuación diferencial de segundo orden, para la multiplicidad de cada uno de los autovalores, solamente es posible obtener dos autofunciones linealmente independientes.

4. 2. SISTEMAS DE STURM–LIOUVILLE SINGULARES

Muchos de los sistemas de Sturm–Liouville más interesantes y más comunes estudiados en la práctica, son clasificados como *singulares*. Algunos de los cuales se presentan un poco más abajo. Estas singularidades cambian la naturaleza general del

sistema, especialmente en la forma de las condiciones de contorno, asegurando que necesariamente el operador es simétrico, también, garantizará que las autofunciones resultantes son mutuamente ortogonales.

DEFINICION 4. 10. *Un sistema de Sturm-Liouville se dice **singular** si uno o más de los siguientes eventos ocurientes en el intervalo $[x_1, x_2]$ son verdaderos :*

- (a) $p(x_1) = 0$ y/o $p(x_2) = 0$
- (b) $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son infinitos en $x = x_1$, 0 , $x = x_2$ (o ambos) y
- (c) Cualquiera de los dos extremos x_1 o x_2 (o ambos) son infinitos.

Algunas ecuaciones diferenciales que caen en esta categoría de sistemas incluye a las siguientes :

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)y'] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (\text{ecuación de Legendre})$$

$$\frac{d}{dx} (xy') - \frac{v^2}{x} y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (\text{ecuación de Bessel})$$

$$\frac{d}{dx} (xe^{-x}y') + \lambda e^{-x}y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (\text{ecuación de Laguerre})$$

$$\frac{d}{dx} (e^{-x^2}y') + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ecuación de Hermite})$$

La ecuación de Legendre es singular, puesto que, $p(x) = 1 - x^2$; es cero en los extremos $x = \pm 1$. Para la ecuación de Bessel hallamos que $p(x) = x$; se anula en $x = 0$ y para $v \neq 0$, la función $q(x) = -v^2/x$ llega a ser infinito en $x = 0$. La ecuación de Laguerre es singular en $x = 0$ puesto que $p(x) = xe^{-x}$ va a cero; pero también un punto extremo del intervalo es infinito. En el caso de la ecuación de Hermite la singularidad es debida totalmente a que los extremos del intervalo son infinitos, donde también $p(x) = e^{-x^2} \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Para asegurar que un sistema de Sturm-Liouville singular genere un operador simétrico, se requiere que

$$\int_{x_1}^{x_2} (uL[v] - vL[u]) = p(x) W(u,v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

donde $u, v \in \mathcal{C}^2[x_1, x_2]$ y cumpliendo condiciones de contorno previamente determinadas para el sistema de Sturm-Liouville. Por ejemplo, si hay una singularidad en $x = x_1$, se imponen condiciones de contorno de la forma

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} p(x) W(u,v)(x) = 0$$

$$p(x_2) W(u,v)(x_2) = 0$$

Cuando las singularidades se levantan específicamente en $x = x_1$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} p(x) W(u,v)(x) = 0$$

se tiene por consiguiente que, inmediatamente, la condición de contorno predeterminada será :

$$y(x), y'(x) \text{ son finitos cuando } x \rightarrow x_1^+$$

y la condición, $p(x_2) W(u,v)(x_2) = 0$ se tendría, imponiendo cualquier condición de contorno de forma

$$a_{12}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) = 0.$$

por supuesto que, condiciones distintas a $p(x_2)W(u,v)(x_2) = 0$ podrían considerarse en razón a que se cumpla

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} p(x)W(u,v)(x) = 0$$

pero cualquier otra condición de contorno es normal, siempre y cuando se conozcan las soluciones no triviales para el problema.

En el caso de una singularidad en $x = x_2$ el tratamiento es análogo.

Por ejemplo si se considera que $p(x_2) = 0$ requerimos que

“ $y(x), y, y'(x)$ permanezcan finitos cuando $x \rightarrow x_2^-$ ”

Finalmente si $p(x_1) = p(x_2) = 0$ se imponen condiciones de contorno de la forma

“ $y(x), y, y'(x)$ finitos cuando $x \rightarrow x_1^+$ y $x \rightarrow x_2^-$ ” .

Las singularidades descritas en problemas de contorno matemático no son en general, verdaderas para problemas de contorno físico. Por ejemplo, en el caso del complementario de un dominio circular de radio b limitando la variable r de manera que $0 \leq r \leq b$, el punto $r = 0$ no es una frontera física y es claramente una condición de contorno. En tales casos tenemos generalmente que imponer condiciones para que la solución del problema de contorno se pueda hallar en $r = 0$.

Al mismo tiempo un problema de autovalores singulares no envuelve un operador simétrico. Este es el caso por ejemplo cuando se considera la distribución de la temperatura a lo largo de una varilla la cual matemáticamente puede ser extendido infinitamente. En este caso no debemos esperar autofunciones y autovalores que cumplan con los teoremas 3,6 y 3.7.

EJEMPLO .- Hallar los autovalores y las autofunciones de

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

$$y(0) = 0, \quad y' \text{ finito si } x \rightarrow 0$$

SOLUCION: Para $\lambda = k^2 > 0$, la solución general es

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

Las primeras condiciones de frontera implican que $c_1 = 0$ y así

$$y = c_2 \sin kx.$$

Ahora las ecuaciones

$$y = c_2 \sin kx \quad y \quad y' = k c_2 \cos kx$$

permanecen finitas cuando $x \rightarrow \infty$. Así concluimos que $\lambda = k^2$ es un autovalor para cualquier k real positivo. La correspondiente función propia es

$$\phi(x) = \sin kx$$

Dejamos al lector curioso probar que no hay más autovalores para $\lambda \leq 0$.

Este ejemplo ilustra que un operador no simétrico puede conducir a resultados enteramente diferentes. Por ejemplo, los autovalores

no son discretos como en el caso de los operadores simétricos, sino que forman el llamado "*un continuo de autovalores*" (o lo que se conoce como *espectro continuo*).

En el ejemplo anterior el operador es no simétrico a causa de las condiciones de contorno, pues

$$p(x) W(u,v)(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \neq 0,$$

dado que $p(x) = 1$ para todo x . Finalizamos esta sección con un ejemplo especial.

EJEMPLO. La ecuación $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ es llamada ecuación de *Chebyshev* y sus soluciones son los polinomios

$$T_n(x) = \cos [n \arccos x] \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$

llamados los polinomios de *Chebyshev*. Entonces los polinomios de Chebyshev forman un conjunto ortogonal con respecto a alguna función de peso $r(x)$.

Para ver esto hallamos la forma autoadjunta asociada a la ecuación de Chebyshev, tenemos que

$$A_2(x) = 1 - x^2, \quad A_1(x) = -x, \quad A_0(x) = 0$$

El factor integrante $g(x)$ debe ser tal que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

o equivalentemente

$$\ln g(x) = \int \frac{x}{1-x^2} dt = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

El factor integrante será :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La forma autoadjunta asociada será :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = (\sqrt{1 - x^2})y']' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

La función de peso será $r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Por el teorema 3.6 se tendrá:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad \text{para todo } n \neq m$$

De aquí concluimos que el conjunto de polinomios de Chebyshev es ortogonal con respecto a la función de peso $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

□

5. EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE COMO FUENTE DE INVESTIGACION.

El objeto de esta sección es presentar el estado actual de los operadores autoadjuntos, especialmente en lo referente al problema de Sturm-Liouville, para lo cual se presentan algunos de los resultados estudiados en la década de los noventa; muchos de los cuales son tema de profunda investigación.

Considérese el problema Sturm-Liouville de la forma :

$$\begin{cases} - [p(x)y']' + q(x)y = \lambda w(x)y, & x \in \Omega = (\alpha, \beta) \\ y(\alpha) = y(\beta) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

con coeficientes continuos, p, q y w en $\bar{\Omega} = [\alpha, \beta]$ cumpliéndose que $b \leq p(x) \leq B$, $c \leq w(x) \leq C$, $q(x) \geq 0$, donde b, B, c y C son constantes positivas.

Las condiciones de contorno aquí presentadas son conocidas como condiciones del tipo Dirichlet. Por el teorema espectral podemos considerar los autovalores $\{\lambda_n\}$ del problema (1) y formar con ellos razones de la forma

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_k}$$

Al estudiar la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \geq 0$$

se encontró la validez de las siguientes desigualdades entre los miembros de su espectro

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \leq m^2 \quad \text{para } m = 2, 3, \dots \quad (2)$$

y

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} < \left[\frac{m}{1} \right]^2 \quad \text{para } m > 1 \geq 1 \quad (3)$$

donde, $\lceil \cdot \rceil$ es la función mayor entero, menor o igual que, además se demostró que los autovalores son tales que

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \leq K \frac{m^2}{k} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

donde k y K son constantes positivas tales que $0 < k < K$.

« Surge aquí el deseo de extender la validez de las desigualdades (2), (3) y (4) al problema propuesto (1). Esto da pie para obtener la siguiente desigualdad

$$\frac{km^2}{Kl^2} \leq \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \leq \frac{Km^2}{kl^2}$$

donde k y K son constantes positivas tales que

$$0 < k \leq p(x)w(x) \leq K \gg .$$

Para lograr la prueba de tales desigualdades se introduce la conocida transformación de Prüfer, dada por las variables $r(x)$, $\theta(x)$ definidas por

$$\begin{cases} y = r(x) \operatorname{sen}[a\sqrt{\lambda}\theta(x)] \\ py' = a\sqrt{\lambda}r(x) \cos[a\sqrt{\lambda}\theta(x)] \end{cases} \quad (5)$$

El factor $\sqrt{\lambda}$ es particularmente útil para obtener aproximaciones de autovalores racionales. Se obtienen variables angulares θ_1 y θ_m para las primeras m funciones propias, con el fin de obtener ventajas en acotaciones óptimas de λ_m / λ_1 vía argumentación por contradicción.

En esta forma la ecuación (1) se transforma en el sistema siguiente

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\lambda} \left(\frac{a}{p} - \frac{w}{a} \right) + \frac{q}{a\sqrt{\lambda}} \right] \operatorname{sen} (2a \sqrt{\lambda} \theta)$$

y

$$\theta' = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{w}{a^2} \right) \operatorname{sen}^2(a\sqrt{\lambda}\theta) - \frac{q}{a^2\lambda} \operatorname{sen}^2(a\sqrt{\lambda}\theta).$$

Aquí a es una constante de proporcionalidad, debida a hipótesis explícitas de las funciones coeficientes p , q , y w del problema (1) y facilitan argumentos de acotación.

El resultado fundamental a estudiar es dado en el siguiente teorema:

TEOREMA 5.1. *Consideremos el problema de Sturm-Liouville*

$$- [p(x)y']' + q(x)y = \lambda w y \quad x \in \Omega = (\alpha, \beta)$$

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0$$

con p , q y w en $\bar{\Omega} = [\alpha, \beta]$, $b \leq p(x) \leq B$, $c \leq w(x) \leq C$, $q \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, donde b, B, c y C son constantes positivas. Entonces

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \leq K \frac{m^2}{k} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

donde k y K son constantes positivas tales que $k \leq p(x)w(x) \leq K$. Más aún la igualdad ocurrirá si y sólo si $q = 0$ y $pw = k = K$.

Dentro de la demostración de éste resultado hay una desigualdad de trigonometría, la cual es interesante mencionar, e invito a que la intenten demostrar y la presento en la siguiente proposición:

PROPOSICION 5.2. *Se fija $c > 0$. Entonces para $0 < \theta < \llbracket c \rrbracket \pi/c$, donde $\llbracket c \rrbracket$ es el mayor entero menor o igual que c , entonces se tiene*

$$\left| \frac{\text{sen } c\theta}{c} \right| < \text{sen } \theta .$$

Un segundo resultado, el cual sorprende porque permite demostrar una famosa conjetura, la cual comentaremos más abajo, se presenta en el siguiente enunciado :

TEOREMA 5.3. *Consideremos el problema regular de Sturm-Liouville*

$$- [p(x)y']' = \lambda w(x)y, \quad x \in \Omega = (\alpha, \beta)$$

en un intervalo finito con condiciones de contorno de Dirichlet y supóngase que K y k son constantes positivas tales que

$$k \leq p(x)w(x) \leq K$$

para todo $x \in (\alpha, \beta)$. Entonces

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \leq K \frac{m^2}{k^2} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

con igualdad si y sólo si $pw = k = K$.

En estas condiciones se está frente a la posibilidad de mostrar la siguiente conjetura conocida como *la conjetura de Payne-Polya-Wienberger* :

Probar que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 + \frac{BC}{bc} \left(\frac{\mathcal{J}_{n/2,1}^2}{\mathcal{J}_{n/2-1}^2} - 1 \right) \quad (6)$$

para la razón de los primeros dos valores propios del problema de valores propios n -dimensionales del problema elíptico

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u = \lambda w(x)u .$$

en un dominio acotado Ω , con condiciones de contorno del tipo Dirichlet en u .

Aquí $[a_{ij}]$ es tomada como una matriz simétrica con $0 < b \leq [a_{ij}] \leq B$ (en el sentido de las formas cuadráticas), $q \geq 0$ y $0 < c \leq w \leq C$,

donde b, B, c y C son constantes. En la desigualdad (6) la notación $\mathcal{J}_{p,k}$ representa el k -ésimo cero positivo de la función de Bessel $J_p(x)$.

Para $n = 1$ solamente se necesita $\mathcal{J}_{1/2,1} = \pi$ y $\mathcal{J}_{-1/2,1} = \pi/2$.

Otro resultado interesante a este mismo respecto es el siguiente enunciado:

TEOREMA 5.3. *Considérese el problema regular de Sturm-Liouville (1) con condiciones de contorno del tipo Dirichlet y $q \geq 0$. Sean k, K constantes positivas tales que*

$$k \leq p(x)w(x) \leq K$$

Entonces los primeros dos valores propios de este problema satisfacen la desigualdad

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 + \frac{3K}{k}$$

Con igualdad si y sólo si $k = K$ y $q \equiv 0$.

NOTA : En este teorema resulta sorprendente que

$$k = bc \quad \text{y} \quad K = BC$$

Otros trabajos de investigación sobre los sistema de Sturm-Liouville y los cuales constituyen resultados recientes, se hallan desarrollados sobre siguientes temas :

Supercondiciones y minicondiciones de contorno para autovalores de un sistema de Sturm-Liouville de segundo orden.

Análisis variacional de autovalores en el problema de Neuman para operadores de Sturm-Liouville .

Autovalores racionales para un operador de Sturm-Liouville.

Teoría espectral inversa para algunos problemas Sturm-Liouville singulares.

Todos estos títulos constituyen resultados de investigación, actualmente en desarrollo, en el campo de los operadores autoadjuntos de segundo orden. Es aquí donde hago una invitación a los posibles lectores de esta notas para que se interesen en tan apasionante tema de investigación.

EJERCICIOS

Hallar la forma autoadjunta asociada a las siguientes ecuaciones diferenciales 1 a 6 :

1. $xy'' + \lambda y = 0, \quad x > 0$

2. $y'' - y' + \lambda y = 0$

3. $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0, \quad x > 0$

4. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1$

5. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad x > 0$

6. $x^2(x^2+1)y'' + 2x^3y' + \lambda y = 0, \quad x > 0$

7. Verifique que un sistema de Sturm–Liouville tiene un operador simétrico.

8. Dado que $r(x) = 1$, verifique que las siguientes funciones son ortogonales en el intervalo $(0, \pi)$:

(a) $\phi_n(x) = \text{sen } nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) $\phi_n(x) = \text{cos } nx$, $n = 0, 1, 2, \dots$

9. En un conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ el cual satisface la relación

$$\int_{x_1}^{x_2} [\phi_n(x)]^2 dx = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es llamado *normalizado* en el intervalo dado. Determine las constantes C_n tales que :

(a) $\phi_n(x) = C_n \text{sen } nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sea un sistema normalizado en $(0, \pi)$

(b) $\phi_n(x) = C_n \text{cos } nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sea un sistema normalizado en $(0, \pi)$

10. Sea $p_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ un conjunto infinito de polinomios satisfaciendo las tres condiciones siguientes

(a) $p_n(x)$ es de grado n ,

(b) $p_n(1) = 1$, $n = 2, 3, \dots$ y

(c) $\int_{-1}^1 p_n(x) p_k(x) dx = 0$, $n \neq k$.

Determine los primeros tres miembros de este conjunto.

11. Repita el problema 10 para el conjunto de polinomios cumpliendo las condiciones

(a) $p_n(x)$ es de grado n

(b) $\int_0^{\infty} e^{-x} p_n(x) p_k(x) dx = 0$, $n \neq k$

(c) $\int_0^{\infty} e^{-x} [p_n(x)]^2 dx = 1$.

12. Si $L = D^4$, demostrar que la identidad de Lagrange toma la forma

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} (uv''' - u''' v - u' v'' + u'' v') .$$

Use este resultado para demostrar que si $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ son autofunciones del problema de autovalores de cuarto orden

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0$$

correspondientes a distintos autovalores λ_n y λ_k , entonces $\phi_n(x)$ y $\phi_k(x)$ son ortogonales en $(1, 0)$.

En los problemas del 13 a 15, demuestre directamente que las auto-funciones de los problemas de Sturm–Liouville son ortogonales usando el método de la sección 3.

13. $y'' + \lambda(1+x)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$

14. $x^2 y'' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(2) = 0$

15. $xy'' + y' + \lambda xy = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$

16 Si y_1 y y_2 son soluciones de $L[y] = 0$, donde L es autoadjunto, demostrar que para alguna constante C se tiene

$$p(x)W(y_1, y_2)(x) = C.$$

En los problemas 17 a 19, halle los autovalores y autofunciones del sistema Sturm–Liouville regular

17. $y'' - 3y' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$

18. $x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(5) = 0$

19. $\frac{d}{dx} [(x^2+1)y'] + \frac{\lambda}{x^2+1} y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

20. Demostrar que $\lambda = 0$ es un autovalor del sistema de Sturm–Liouville regular siguiente

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + \lambda r(x)y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

En los problemas 21 a 23, halle los autovalores y las autofunciones de los siguientes sistemas de Sturm–Liouville periódicos

21. $y'' + \lambda y = 0$, $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$

22. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$

23. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$

24. Demostrar que no hay autovalores negativos en el ejercicio 21

25. Sean $\phi_n(x)$ y $\psi_n(x)$ autofunciones linealmente independientes en el intervalo $x_1 < x < x_2$, correspondientes al mismo autovalor λ_n .

Dadas las combinaciones lineales

$$f_n(x) = \phi_n(x), \quad g_n(x) = \psi_n(x) - \alpha\phi_n(x),$$

hallar el valor de α tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) f_n(x) g_n(x) dx = 0.$$

26. Demostrar que $\lambda = 0$ es un autovalor de multiplicidad dos para

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(1), \quad y'(0) + y(0) = y(1).$$

Hallar un par autofunciones ortogonales pertenecientes a $\lambda = 0$

En los problemas 27 y 28, hallar los autovalores y las autofunciones del sistema de Sturm–Liouville singular

27. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, y, y' finitos cuando $x \rightarrow x^+$

28. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, y, y' finitos cuando $x \rightarrow \infty$

En los problemas 29 y 30, determine las propiedades típicas de la condición de contorno necesaria para asegurar la ortogonalidad de las autofunciones resultantes

29. $\frac{d}{dx} [1 - x^2)y'] + \lambda y = 0$, $-1 < x < 1$

30. $\frac{d}{dx} (xy') + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$

BIBLIOGRAFIA

[1] Coddington and Levinson : *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill. 1955.

[2] G.Birkhoff and G. Rota: *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons. 1978.

[3] G.W.Bluman and J.D.Cole: *Similarity Methods for Differential Equations*.

- Springer-Verlag. 1974.
- [4] Kreider, Kuller, Ostberg: *Ecuaciones Diferenciales*. Fondo Educativo Interamericano S.A.. 1973.
- [5] M. Braun: *Differential Equations and their Applications*. Springer International. 1978.
- [6] W.E. Boyce and R.C. DiPrima: *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa. 1979.
- [7] I.G. Petrovski: *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, Inc. 1973.
- [8] J.K. Hale: *Ordinary Differential Equations*. Krieger publishing Company. 1980.
- [9] L.S. Pontryagin: *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley. 1962.
- [10] M. Esser: *Differential Equations*. Saunders Company. London 1968.
- [11] W. Hurewicz: *Lectures on Ordinary Differential Equations*. The M.I.T. Press 1970.
- [12] F. Simmons: *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill. 1979.
- [13] G. Strang: *Linear Algebra and its Applications*. Academic Press 1970.
- [14] R. Pastor, Pi Calleja, C.A. Trejo: *Análisis Matemático*. Vol. III Editorial Kapelusz. Buenos Aires. 1959.
- [15] J. McLaughlin: *Upper and Lower Bounds on Eigenvalues of Second-Order Sturm-Liouville Systems*. Journal of Differential Equations.
- [16] M.S. Ashbaugh: *Eigenvalue Ratios for Sturm-Liouville Operators*. Journal of Differential Equations 103, 205-219 (1993).
- [17] Hua-Huai Chern and Chao-Liang Shen: *On the Maximum and Minimum of Some Functionals for the Eigenvalue Problem of Sturm-Liouville Type*. Journal of Differential Equations 107. 68-79 (1994).
- [18] M. Dauge and B. Helffer: *Eigenvalues Variation. I. Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators*. Journal of Differential Equations 104, 243-262 (1993).
- [19] S. Breuer & D. Gottlieb: *Upper and lower bounds on eigenvalues of Sturm-Liouville systems*, J. Math. Anal. Appl. 1971.
- [20] R. Carlson: *Inverse Spectral Theory for Some Singular Sturm-Liouville Problems*. Journal of Differential Equations 106, 121-140 (1993).
- [21] J.D. Sánchez: *Teoría general de Ecuaciones Diferenciales lineales*. II Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1985.
- [22] J.D. Sánchez: *Ecuaciones Integrales*. VI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1989.
- [23] J.D. Sánchez: *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. I Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1984.

ДАЖЙЛЛЭЮ

Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de la teoría de Operadores Autoadjuntos.

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática avanzada y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora quien leyó los originales y cuidó del buen manejo del lenguaje español.

Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:

danojuanos@hotmail.com,

danojuanos@tutopia.com

danojuanos@yahoo.com

Copyright© Darío Sánchez Hernández