APORTES

# ELEMENTOS DE ANÁLISIS NO LINEAL

*José Darío Sánchez Hernández*
*Bogotá -Colombia. Enero- 2008*
*danojuanos@hotmail.com*
*danojuanos@tutopia.com*
*danojuanos@yahoo.com*

Presento al cibernauta un aporte en análisis no lineal, el cual fue un cursillo que dicté en el VIII Coloquio Distrital en Bogotá, allá por el año de 1991: constituyendo una herramienta fundamental y que tiene por finalidad facilitar la lectura de los diversos aportes que, en este proyecto de aprendizaje de la matemática avanzada, he presentado y que el interesado sabrá valorar y asimilar.

INTRODUCCIÓN. En la investigación de muchos tópicos sobre ecuaciones diferenciales, las funciones convexas juegan un papel destacado, como es el caso de los sistemas hamiltonianos con potencial convexo.
Con el objeto de presentar la matemática útil en la investigación de ese tipo de problemas, me propongo redactar en este aporte el análisis no lineal, dirigido a la resolución de problemas enunciados en artículos diversos y aquí presentados.

## §1. TOPICOS EN ANÁLISIS CONVEXO.

Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach real ( vea [8] ), $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}$ una parte convexa y $f:\mathcal{U}\longrightarrow\overline{\Re}$, donde $\overline{\Re}=\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$. Se sabe que $f$ es una función convexa cuando para todo $u,v$ en $\mathcal{U}$ y $0\leq\lambda\leq 1$ se tiene

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$$

cada vez que el segundo miembro tenga sentido.
Cuando $f:\mathcal{U}\longrightarrow\overline{\Re}$ es convexa y $a\in\overline{\Re}$, en el conjunto $\mathcal{U}$ se distinguen claramente dos subconjuntos

$$\{u\in\mathcal{U};\ f(u)\leq a\},\quad \text{y} \ ,\quad \{u\in\mathcal{U};\ f(u)>a\}$$

los cuales se conocen como las secciones y son partes convexas en $\mathbb{E}$.
Dada una función convexa $f:\mathbb{E}\longrightarrow\overline{\Re}$ se denomina *dominio efectivo* de $f$ al subconjunto del dominio de $f$, definido de la siguiente forma

$$dom_{ef}f=\{u\in\mathbb{E};\ f(u)<+\infty\}$$

Considérese $f:\mathcal{U}\longrightarrow\overline{\Re}$ y $\widetilde{f}:\mathbb{E}\longrightarrow\overline{\Re}$ definida por

$$\widetilde{f}(u)=\begin{cases} f(u) & \text{si} \quad u\in\mathcal{U}\\ +\infty & \text{si} \quad u\in\mathbb{E}-\mathcal{U}\end{cases}$$

resulta que $\widetilde{f}$ es convexa si y sólo si $\mathcal{U}$ es una parte convexa de $\mathbb{E}$ y $f:\mathcal{U}\longrightarrow\overline{\Re}$ es una función convexa.
Sea $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{E}$, se denomina ***indicatriz*** de $\mathcal{U}$ a la función $\chi_u$ dada por

$$\chi_u(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathcal{U}\\ +\infty & \text{si } x\in\mathbb{E}-\mathcal{U}\end{cases}.$$

Resulta así que $\mathcal{U}$ es una parte convexa de $\mathbb{E}$, si y sólo si, la indicatriz $\chi_u$ es una función convexa. En esta forma el estudio de los conjuntos convexos se puede reducir al estudio de las funciones convexas.
Sea $f:\mathbb{E}\longrightarrow\overline{\Re}$ una función convexa, se dice que $f$ es ***propia*** cuando

$\{x\in\mathbb{E};\ f(x)=-\infty\}=\emptyset$, y , $\{x\in\mathbb{E};\ f(x)=+\infty\}\neq\mathbb{E}$.

Se denomina ***epigráfico*** de una función $f:\mathcal{U}\longrightarrow\overline{\Re}$, al subconjunto de $\mathbb{E}\times\Re$ dado por

$$Epi\,f=\{(x,a)\in\mathbb{E}\times\Re; f(x)\leq a\}$$

Nótese que $\{(x,a)\in\mathbb{E}\times\Re;\ f(x)=a\}$ es el gráfico de $f$. Por lo tanto, su $Epi\,f$ es la colección de los puntos de $\mathbb{E}\times\Re$ que están por arriba del gráfico de $f$ incluyendo el propio gráfico de $f$. La proyección del $Epi\,f$ sobre $\mathbb{E}$ es justamente el dominio efectivo $dom_{ef}f$.

PROPOSICIÓN 1.1. *Una función $f:\mathbb{E}\longrightarrow\overline{\Re}$ es convexa, si y solamente si, su $Epi\,f$ es una parte convexa de $\mathbb{E}\times\Re$.*
DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f$ es convexa y $(x,a),(y,b)\in Epif$, se tiene $f(x)\leq a<+\infty$, $f(x)\leq b<+\infty$ y para todo $\lambda\in[0,1]$ se obtiene

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leq\lambda a+(1-\lambda)b.$$

Resulta que

$$\lambda(x,a)+(1-\lambda)(y,b)=(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda a+(1-\lambda)b)\in Epif.$$

Recíprocamente supongamos que $Epif$ es una parte convexa de $\mathbb{E}\times\Re$. Se sabe que $dom_{ef}f$ es la proyección de $Epif$ sobre $\mathbb{E}$, así sean $x,y\in dom_{ef}f$ entonces $a\geq f(x)$, $b\geq f(y)$ para $a,b\in\Re$ cualesquiera. Resulta de aquí que $\lambda(x,a)+(1-\lambda)(y,b)\in Epif$, para todo $0\leq\lambda\leq1$ luego

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda a+(1-\lambda)b.$$

Cuando $f(x),f(y)$ son finitos, basta tomar $a=f(x)$, $b=f(y)$ para concluir que $f$ es convexa. Cuando $f(x)$, $f(y)$ no son finitos, se hacen $a$ y $b$ tender a un valor infinito de modo apropiado.

DEFINICIÓN 1.2. *Se dice que $f:\mathbb{E}\longrightarrow\overline{\Re}$ es **semicontinua** inferiormente $(s.c.i)$ cuando se tienen las siguientes condiciones:*
$i)$ ***Para cada** $a\in\Re$, $\{x\in\mathbb{E};\ f(x)\leq a\}$ **es cerrado en** $\mathbb{E}$.*
$ii)$ ***Para cada** $x\in\mathbb{E}$ **se tiene** $f(x)\leq\ \liminf\limits_{v\to x} f(v)$.*

Por ejemplo dada una forma bilineal simétrica, continua, $\phi(x,y)$ en $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ se sigue que $v\mapsto\phi(v,v)$ es semicontinua inferiormente con respecto a la topología débil de $\mathbb{E}$. También para $f\in\mathbb{E}^*$, continua, la aplicación $v\mapsto\langle f,v\rangle$ es semicontinua inferiormente.

DEFINICIÓN 1.3. *Sea* $f : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\Re}$ *, se denomina* ***derivada direccional*** *de* $f$ *en la dirección de* $v$, *al límite*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \tfrac{1}{\lambda}[f(x+\lambda v) - f(x)]$$

$\lambda$ *un número real positivo, cuando este límite existe y se representa por* $f'(x,v)$.

Cuando existe una forma lineal continua $\chi$ sobre $\mathbb{E}$, esto es $\chi \in E^*$ (el dual de $\mathbb{E}$) tal que para todo $v \in \mathbb{E}$ se tiene $f'(x,v) = \langle \chi, v \rangle$ entonces se dice que $f$ es derivable en el sentido de ***Gateaux*** y $\chi$ se denomina la derivada de *Gateaux* de $f$ en $x$, la cual se representa por $f'(x)$.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea* $f : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\Re}$ *convexa y diferenciable en el sentido de Gateaux en* $u \in \mathbb{E}$*. Para todo* $v \in \mathbb{E}$ *se tiene*

$$f(v) - f(u) \geq \langle f'(u), v-u \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, siendo $f$ convexa, se obtiene

$$\lambda f(v) + (1-\lambda) f(u) \geq f(\lambda v + (1-\lambda)u)$$

y de aquí se obtiene

$$f(v) - f(u) \geq \tfrac{1}{\lambda}[f(u+\lambda(v-u)) - f(u)].$$

Tomando límite cuando $\lambda$ tiende a cero, y observando que $f$ es derivable en el sentido de Gateaux, se obtiene la desigualdad deseada.

□

Consideremos una función $f : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\Re}$ convexa. De la proposición 1.4 se deduce que si $f$ es derivable en el sentido de Gateaux en $u$, entonces

$$f(v) - f(u) \geq \langle f'(u), v-u \rangle$$

para todo $v \in \mathbb{E}$. Cuando $f$ es convexa, pero no diferenciable se define la subdiferencial de $f$ como sigue:

DEFINICIÓN 1.5. *Se dice que* $\chi \in \mathbb{E}^*$ *es un* ***subgradiente*** *de* $f$ *en* $u$ *cuando*

$$f(v) - f(u) \geq \langle \chi, v-u \rangle$$

*para todo* $v \in \mathbb{E}$.

Represéntese por $\partial f(u)$ a la colección de los subgradientes de $f$ en $u$, es decir

$$\partial f(u) = \{\chi \in \mathbb{E}^* / f(v) - f(u) \geq \langle \chi, v-u \rangle\}.$$

La función de $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^*$ dada por $\partial f : u \to \partial f(u)$ se denomina ***subdiferencial*** de $f$ en $u$.

Más exactamente la aplicación $\partial f$ es multivaluada, esto es, está definida de $\mathbb{E}$ en $2^{\mathbb{E}^*}$. Para seguir una uniformidad con el lenguaje se suele ***representar*** la subdiferencial en la forma

$$f(v) - f(u) \geq \big\langle \partial f(u), v-u \big\rangle$$

pata todo $v \in \mathbb{E}$. Esto quiere decir que $f(v) - f(u) \geq \langle \chi, v-u \rangle$ para todo $v \in \mathbb{E}$, cualquiera que sea el subgradiente $\chi \in \partial f(u)$.
Se demuestra que cuando $f$ es diferenciable en el sentido de Gateaux en $u \in \mathbb{E}$, entonces su subdiferencial es $\partial f(u) = \{f'(u)\}$
Por otro lado, se tiene que si $f$ es finita, continua y posee un único subgradiente en $u \in \mathbb{E}$ entonces $f$ es diferenciable en el sentido de Gateaux en $u$ y $\partial f(u) = \{f'(u)\}$.

## §2. CARACTERIZACIONES DE UNA PROYECCION SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real, consideraremos aquí la proyección sobre un conjunto convexo de $\mathcal{H}$.

AFIRMACIÓN 1. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto convexo cerrado de un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$. Entonces para cada $x \in \mathcal{H}$ existe un único $y \in \mathbb{K}$ tal que*

$$(1) \qquad \|x - y\| = \inf_{n \in \mathbb{K}} \|x - n\|$$

Veamos la afirmación: Sea $n_j \in \mathbb{K}$ una sucesión minimizada, naturalmente se tiene

$$(2) \qquad \lim_{j \to \infty} \|n_j - x\| = d = \inf_{n \in \mathbb{K}} \|n - x\|$$

por la ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
&2\|x-n_j\|^2 + 2\|x-n_i\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(n_j+n_i)\right\|^2 = \\
&= 2(x-n_j, x-n_j) + 2(x-n_i, x-n_i) - 4\left(x - \tfrac{1}{2}(n_j+n_i), x - \tfrac{1}{2}(n_j+n_i)\right) \\
&= 2(x,x) - 4(x,n_j) + 2(n_j, nj) + 2(x,x) - 4(x,n_i) + 2(n_i,n_i) + \\
&+ 4(x, n_j+n_i) - 4(x,x) - \|n_j+n_i\|^2 \\
&= 2\|n_j\|^2 + 2\|n_i\|^2 - \|n_j+n_i\|^2 = \|n_j+n_i\|^2 + \|n_j-n_i\|^2 - \|n_j+n_i\|^2 \\
&= \|n_j-n_i\|^2,
\end{aligned}$$

o sea tenemos

$$(3) \qquad \|n_j - n_i\|^2 = 2\|x-n_j\|^2 + 2\|x-n_i\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(n_j+n_i)\right\|^2.$$

Como $\mathbb{K}$ es convexo, se tiene que $\frac{1}{2}(n_j+n_i) \in \mathbb{K}$ y $d^2 \leq \left\|x - \frac{1}{2}(n_j+n_i)\right\|^2$ esto dado que

$$\left\|x - \tfrac{1}{2}(n_j+n_i)\right\| \;\geq\; \inf_{n \in \mathbb{K}} \|n - x\| = d$$

se sigue entonces que

$$\|n_j - n_i\|^2 \leq 2\|x-n_j\|^2 + 2\|x-n_i\|^2 - 4d^2$$

Como $d = \inf_{n \in \mathbb{K}} \|n-x\|$, concluimos que $\lim_{j,i \to \infty} \|n_j - n_i\| = 0$ y $\{n_j\}$ es una sucesión de Cauchy. Por consiguiente y dado que $\mathcal{H}$ es completo, existe un $y \in \mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} n_j = y$$

y además $\|x-y\| = \lim_{j\to\infty}\|x-n_j\| = d$.

Para ver que $y$ es único, solamente observe que para $y, y' \in \mathbb{K}$ tales que

$$\|x-y\| = \|x-y'\| = \inf_{n\,\in\,\mathbb{K}}\|x-n\|$$

y usando $(3)$ tomando $n_j = y$, $n_i = y'$ obtenemos

$$\|y-y'\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(y-y')\right\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0$$

de donde se obtiene que $y = y'$.

□

Se puede caracterizar la proyección mediante desigualdades, conocidas como desigualdades variacionales, como lo podemos ver en el siguiente resultado; utilizando $p_k^r(x)$ como notación para la proyección.

TEOREMA 1. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto convexo, cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces $y = p_{\mathbb{K}}^r x$, la proyección de $x$ en $\mathbb{K}$, si y solamente si*

$(4)$ $\quad y \in \mathbb{K}:\ (y, n-y) \ge (x, n-y)$ *para todo* $n \in \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{H}$, y , $y = p_{\mathbb{K}}^r x \in \mathbb{K}$. Puesto que $\mathbb{K}$ es convexo

$$(1-t)y + tn = y + t(n-y) \in \mathbb{K} \ \text{ para todo } n \in \mathbb{K},\ \ 0 \le t \le 1$$

y por lo tanto de $(1)$ la función

$$\Phi(t) = \|x-y-t(n-y)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2t(x-y, n-y) + t^2\|n-y\|^2$$

toma su mínimo para $t = 0$. Así $\phi'(0) \ge 0$, de donde se tiene que

$$(x-y, n-y) \le 0, \ \text{ para } n \in \mathbb{K}$$

o en forma equivalente se tiene

$$(y, n-y) \ge (x, n-y), \text{ para } n \in \mathbb{K}.$$

Por otro lado, si

$$y \in \mathbb{K}: \qquad (y, n-y) \ge (x, n-y), \qquad \text{para } n \in \mathbb{K}$$

entonces

$$0 \le (y-x, (n-x) + (x-y)) \le -\|x-y\|^2 + (y-x, n-x).$$

Por lo tanto

$$\|y-x\|^2 \le (y-x, n-x) \le \|y-x\|\|n-x\|.$$

De donde finalmente

$$\|y-x\| \le \|n-x\| \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{K}.$$

Se puede ahora considerar un operador de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ dado por $p_{\mathbb{K}}^r : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que a cada $x \in \mathcal{H}$ asocia $p_{\mathbb{K}}^r x$.

AFIRMACIÓN 2. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto cerrado convexo de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el operador $p_{\mathbb{K}}^r$ es no expansivo, esto es*

$(5)$ $$\|p_{\mathbb{K}}^r x - p_{\mathbb{K}}^r x'\| \le \|x-x'\| \quad \textit{para} \quad x, x' \in \mathcal{H}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dados $x, x' \in \mathcal{H}$, sea $y = p_{\mathbb{K}}^r x$ y $y' = p_{\mathbb{K}}^r x'$. Entonces

$$y \in \mathbb{K}:\ (y, n-y) \ge (x, n-y),\ n \in \mathbb{K}$$
$$y' \in \mathbb{K}: (y', n-y') \ge (x', n-y'),\ n \in \mathbb{K}.$$

Tomando $n = y'$ en la primera desigualdad y $n = y$ en la segunda desigualdad y sumando obtenemos

$$\|y-y'\|^2 = (y-y', y-y') \le (x-x', y-y') \le \|x-x'\|\|y-y'\|$$

ó

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\|.$$

TEOREMA 2. (Brouwer). *Sea $\mathbb{K} \subset \Re^N$ compacto, convexo y sea $F : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ continua. Entonces $F$ admite un punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega$ una bola cerrada en $\Re^N$ tal que $\mathbb{K} \subset \Omega$. Por la afirmación 2, $p^r_{\mathbb{K}}$ es continua, por tanto la aplicación

$$F \circ p^r_{\mathbb{K}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \subset \Omega$$

es una aplicación continua de $\Omega$ en sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer ([1]), entonces existe un punto $\tilde{x} \in \mathbb{K}$ para el cual

$$F \circ p^r_{\mathbb{K}} \tilde{x} = \tilde{x} \in \mathbb{K}$$

como ya se hizo notar cuando $x \in \mathbb{K},\ p^r_{\mathbb{K}} x = x$, luego $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

([1])Brouwer: Sea $F$ una función continua de una bola cerrada $\Sigma \subset \Re^N$ en si misma, entonces $F$ admite al menos un punto fijo.

## §3. DESIGUALDADES VARIACIONALES.

Sea $f : I = [a, b] \rightarrow \Re$ una función suave, sea $x_0 \in I$ para el cual

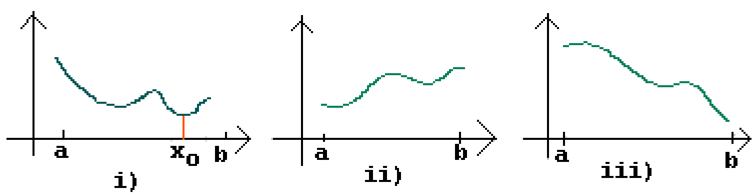
$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Tres casos pueden ocurrir

$i)$ si $a < x_0 < b$, entonces $f'(x_0) = 0$

$ii)$ si $x_0 = a$, entonces $f'(x_0) \geq 0$, y

$iii)$ si $x_0 = b$, entonces $f'(x_0) \leq 0$.




Estos casos se pueden resumir escribiendo

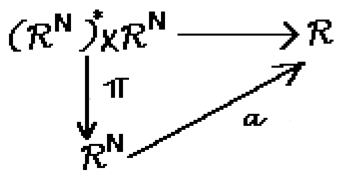
$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in I$$

este tipo de desigualdades son denominadas *desigualdades variacionales*.

En el estudio de las desigualdades variacionales son frecuentes conceptos como "una función $F$ de un espacio lineal $\mathcal{X}$" ó "un subconjunto convexo $\mathbb{K} \subset \mathcal{X}$" en su dual $\mathcal{X}^*$. Recordemos que el dual $(\Re^N)^*$ de $\Re^N$ es el espacio de todas las formas lineales

$$\alpha : \Re^N \longrightarrow \Re, \qquad x \mapsto \langle \alpha, x \rangle$$

definidas en $\Re^N$




La aplicación bilineal

$$\begin{array}{c}(\Re^N)^* \times \Re^N \longrightarrow \Re \\ (\alpha, x) \mapsto \langle \alpha, x\rangle\end{array}$$

es conocida bajo la denominación de "*ligamiento*" o también aplicación de Clarke y mediante ella podemos identificar $\left(\Re^N\right)^*$ con $\Re^N$, por ejemplo, podemos identificar $\alpha \in \left(\Re^N\right)^*$ con el elemento $\pi\alpha \in \Re^N$ tal que $\langle \alpha, x\rangle = \langle \pi\alpha, x\rangle$.

TEOREMA 3. *Sea* $\mathbb{K} \subset \Re^N$ *un conjunto compacto, convexo y sea* $F : \mathbb{K} \longrightarrow \left(\Re^N\right)^*$ *una aplicación continua. Entonces existe un* $x \in \mathbb{K}$ *tal que*

(1) $\langle F(x), y - x\rangle \geq 0$ *para todo* $y \in \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba del teorema es equivalente a mostrar la existencia de

$$x \in \mathbb{K} : (x, y - x) \geq (x - \pi F(x), y - x) \text{ para todo } y \in \mathbb{K}$$

Ahora la aplicación

$$p^r_{\mathbb{K}}(I - \pi F) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde $Ix = x$, es continua, por lo tanto, el teorema 2 nos brinda la existencia de un punto fijo $x \in \mathbb{K}$, esto es

$$x = p^r_{\mathbb{K}}(I - \pi F)x.$$

Por el teorema 1 de caracterización de la proyección, se sigue que

$$(x, y - x) \geq (x - \pi F(x), y - x) \quad \text{para todo } y \in \mathbb{K}.$$

□

DEFINICIÓN 3.1. *Sea* $\mathbb{K}$ *un conjunto convexo de* $\Re^N$ *y* $x \in \partial\mathbb{K}$ *(donde* $\partial\mathbb{K}$ *es la frontera de* $\mathbb{K}$*). Un hiperplano* $\langle \alpha, y - x\rangle \geq 0$ *para todo* $\alpha \in (\Re^N)^* - \{0\}$ *es llamado un* ***hiperplano de soporte*** *o hiperplano soportado de* $\mathbb{K}$ *si* $\langle \alpha, y - x\rangle \geq 0$ *para todo* $y \in \mathbb{K}$.

AFIRMACIÓN 3. *Sea* $x$ *una solución de* $\langle F(x), y - x\rangle \geq 0$ *para todo* $y \in \mathbb{K}$ *y supongamos que* $x \in \partial\mathbb{K}$*. Entonces* $F(x)$ *determina un hiperplano soportado de* $\mathbb{K}$*, siempre que* $F(x) \neq 0$.

Esta afirmación es clara ya que la función afín $f(y) = \langle F(x), y - x\rangle$ es no negativa para todo $y \in \mathbb{K}$.

### 3.1. DESIGUALDADES VARIACIONALES EN $\Re^N$.

Estas se presentan cuando enunciamos problemas como el que sigue, en donde los espacios de base son $\Re^N$ y su dual $(\Re^N)^*$.

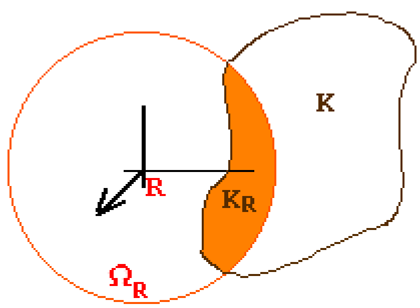
PROBLEMA 1. *Dado un conjunto* $\mathbb{K}$ *convexo, cerrado en* $\Re^N$ *y* $F:\mathbb{K}\to(\Re^N)^*$ *una función continua, hallar*

$$x\in\mathbb{K}:\langle F(x),y-x\rangle\geq 0 \quad \textit{para} \quad y\in\mathbb{K}$$

Si $\mathbb{K}$ es acotado, ya hemos probado la existencia de una solución para el problema 1 en el teorema 3. Pero en general este problema no siempre admite solución como puede verse al tomar $\mathbb{K}=\Re$, entonces tomando $f(x)=e^x$ en la desigualdad

$$f(x)(y-x)\geq 0 \quad \text{para todo } y\in\Re$$

no se tiene solución, como se puede comprobar muy fácilmente.
El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones al problema 1.
Dado un conjunto convexo $\mathbb{K}$ escojamos $\mathbb{K}_R=\mathbb{K}\cap\Omega_R$ donde $\Omega_R$ es una bola cerrada de radio $R$ y centro $0\in\Re^N$




Para $F:\mathbb{K}\longrightarrow(\Re^N)^*$ notamos que existe al menos un

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_R\in\mathbb{K}_R:\langle F(x_R),y-x_R\rangle\geq 0 \\ \text{para todo } \; y\in\mathbb{K}_R \end{array}\right\}$$

siempre y cuando $\mathbb{K}_R\neq\emptyset$, esto según el teorema 3.

TEOREMA 4. *Sea* $\mathbb{K}\subset\Re^N$ *un conjunto cerrado, convexo y*

$$F:\mathbb{K}\longrightarrow(\Re^N)^*$$

*una función continua. Una condición necesaria y suficiente para que exista una solución para el problema 1, es que exista un* $R>0$ *tal que la solución* $x_R\in\mathbb{K}_R$ *de* $(1)$ *satisfaga que*

$$(2) \qquad \|x_R\|<R$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si existe una solución para el problema 1 siempre que $\|x\|<R$, pues en ese caso $x\in\Omega_R\cap\mathbb{K}$.
Supóngase ahora que $x_R\in\mathbb{K}_R$ satisface $(2)$. Entonces $x_R$ es también solución para el problema 1; en verdad, puesto que $\|x_R\|<R$ dado $y\in\mathbb{K}$, $w=x_R+\epsilon(y-x_R)\in\mathbb{K}$ para $\epsilon\geq 0$ suficientemente pequeño, por consiguiente

$$x_R\in\mathbb{K}_R\subset\mathbb{K}:0\leq\langle F(x_R),w-x_R\rangle=\epsilon\langle F(x_R),y-x_R\rangle \quad \text{para} \;\; y\in\mathbb{K}$$

lo cual implica que $x_R$ es solución para el problema 1, lo cual se quería obtener.
□

Una noción de mucha utilidad en el análisis convexo y sus aplicaciones es la coercitividad la cual presentamos bajo el siguiente resultado.

AFIRMACIÓN 4. *Sea* $F:\mathbb{K}\longrightarrow(\Re^N)^*$ *una función tal que*

$$\frac{\langle F(x)-F(x_0),x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|}\to+\infty \text{ cuando } |x|\to+\infty,\quad x\in\mathbb{K} \tag{3}$$

*para algún* $x_0\in\mathbb{K}$*. Entonces existe una solución para el problema 1.*

DEMOSTRACIÓN. Escójase $H>\|F(x_0)\|$ y $R>\|x_0\|$ tal que

$$\langle F(x)-F(x_0),x-x_0\rangle\geq H\|x-x_0\| \quad \text{para } \|x\|\geq R,\quad x\in\mathbb{K}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle F(x),x-x_0\rangle &\geq H\|x-x_0\|+\langle F(x_0),x-x_0\rangle\\ &\geq H\|x-x_0\|-\|F(x_0)\|\|x-x_0\|\\ &\geq (H-\|F(x_0)\|)(\|x\|-\|x_0\|)\quad \text{para}\quad \|x\|=R.\end{aligned} \tag{4}$$

Ahora sea $x_R\in\mathbb{K}_R$ la solución de $(1)$. Entonces

$$\langle F(x_R),x_R-x_0\rangle=-\langle F(x_R),x_0-x_R\rangle\leq 0.$$

Así en virtud de $(4)$, $\|x_R\|\neq R$. En otras palabras, $\|x_R\|<R$.

Generalmente, la solución para una desigualdad variacional no es única. Existe sin embargo una condición muy natural la cual asegura unicidad. Supóngase que $x,x'\in\mathbb{K}$ son dos soluciones distintas para el problema 1, entonces

$$x\in\mathbb{K};\ \langle F(x),y-x\rangle\geq 0 \qquad y\in\mathbb{K}$$
$$x'\in\mathbb{K};\ \langle F(x'),y-x'\rangle\geq 0 \qquad y\in\mathbb{K}$$

así, tomando $y=x'$ en la primera desigualdad, $y=x$ en la segunda y sumando las dos obtenemos

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle\leq 0$$

Por lo tanto una condición natural para la unicidad es que

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle>0, \text{ para } x,x'\in\mathbb{K},\ x\neq x'.$$

Regresando a las condiciones de la afirmación 4, vemos que implican la unicidad para el problema en dimensión infinita.

DEFINICIÓN 3.2. *La condición* $(3)$ *de la afirmación 4, es una condición de coercitividad.*

NOTA: La afirmación:

$$\frac{\langle F(x)-F(x_0)\,,x-x_0\rangle}{|x-x_0|}\to+\infty \text{ cuando } |x|\to+\infty,\ x\in\mathbb{K}$$

nos brinda una condición de ***coercitividad .***

DEFINICIÓN 3.3. *Se dice que una aplicación* $F:\mathbb{K}\longrightarrow(\Re^N)^*$ ***es monótona si***

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle\geq 0 \text{ para todo } x,x'\in\mathbb{K}$$

*y es llamada* ***estrictamente monótona si***

$$\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle>0, \text{ para todo } x,x'\in\mathbb{K},\ x\neq x'.$$

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea* $F:\mathbb{K}_1\longrightarrow(\Re^N)^*$ *una aplicación estrictamente monótona, continua del conjunto cerrado convexo* $\mathbb{K}_1\subset\Re^N$*. Sea* $\mathbb{K}_2\subset\mathbb{K}_1$

*un subconjunto cerrado y convexo. Supóngase que existe una solución a cada uno de los problemas siguientes*

$$x_j \in \mathbb{K}_j; \langle F(x_j), y - x_j \rangle \geq 0 \quad \textit{para} \ y \in \mathbb{K}_j, \qquad j = 1, 2.$$

$i)$ *Si* $F(x_2) \neq 0$ *y* $x_1 \neq x_2$*, entonces el hiperplano* $\langle F(x_2), y - x_2 \rangle = 0$ *separa* $x_1$ *de* $\mathbb{K}_2$.

$ii)$ *Si* $F(x_2) = 0$*, entonces* $x_1 = x_2$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos por comodidad la validez de $(ii)$, sabemos que $F$ es estrictamente monótona en $\mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$, entonces $\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0$, por hipótesis se tiene $\langle F(x_1), y - x_1 \rangle \geq 0$ y $F(x_2) = 0$, así se recibe que $\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$ y $\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$, esto sólo es posible si $x_2 = x_1$.

Veamos ahora $i)$. Supongamos que $x_1$ no está separada de $\mathbb{K}_2$, entonces $\langle F(x_2), x_1 - x_2 \rangle = 0$, por la definición de $x_1$ se sigue

$$\langle F(x_1), y - x_1 \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{K}_1, \text{ y }, \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$$

luego en particular para $x_2$ se tiene

$$\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0, \text{ y }, \langle F(x_2), x_1 - x_2 \rangle = 0,$$

así

$$\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle - \langle F(x_2), x_2 - x_1 \rangle = \langle F(x_1) - F(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

pero como $x_1 \neq x_2$, se obtiene que $F$ no es estrictamente monótona contra la hipótesis.

□

## §4. EL POTENCIAL CONVEXO COMO UNA DESIGUALDAD VARIACIONAL.

Veamos un problema elemental que nos lleva a desigualdades variacionales, discutamos, la conexión entre funciones convexas y los operadores monótonos.

Sea $f \in C^1(\mathbb{K}),\ \mathbb{K} \subset \Re^N$, un conjunto cerrado convexo, y sea

$$F(x) = gradiente\, f(x) = \nabla f(x).$$

En este punto no hacemos distinción entre $\Re^N$ y $\left(\Re^N\right)^*$, permitiéndonos así presentar nuestro segundo problema, el cual nos permite hallar el contacto entre los campos convexos y las desigualdades variacionales.

PROBLEMA 2. *Supóngase que existe un* $x \in \mathbb{K}$ *tal que*

$$f(x) = \min_{y \in \mathbb{K}} f(y)$$

*Entonces* $x$ *es solución de la desigualdad variacional*

$$x \in \mathbb{K} : (F(x), y - x) \geq 0 \ \textit{para todo} \ y \in \mathbb{K}.$$

*La inversa es válida siempre y cuando* $f$ *sea convexo.*

PROPOSICIÓN 4.1. *Supóngase que* $f$ *es convexa y* $x$ *satisface*

$$x \in \mathbb{K} : (F(x), y - x) \geq 0 \ \textit{para todo} \ y \in \mathbb{K}$$

*entonces*

$$f(x) = \min_{y \in \mathbb{K}} f(y).$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $f$ es convexo

(1) $f(y) \geq f(x) + (F(x), y-x)$ para dada $y \in \mathbb{K}$

Pero $(F(x), y-x) \geq 0$, así $f(y) \geq f(x)$ de donde la proposición, pues tomando la función

$$g(t) = f(tx + (1-t)y) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$g'(t)$ es creciente pues $g$ es convexa y por el teorema del valor medio se sigue que

$$g(1) - g(0) = g'(0) \leq g'(1)$$

donde $g(1) = f(x)$, $g(0) = f(y)$ y $g'(1) = (\nabla f(x), x-y)$ obteniéndose $(1)$.

□

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea $f : \mathbb{E} \to \Re$, $\mathbb{E} \subseteq \Re^N$, una función continua derivable (o sea de clase $C^1$) convexa. Entonces $F(x) = \nabla f(x)$ es monótona.*

DEMOSTRACIÓN. Dados $x, x' \in \mathbb{E}$, como $f$ es convexa se tiene

$$f(x) \geq f(x') + (F(x'), x-x'), \text{ y }, f(x') \geq f(x) + (F(x), x'-x)$$

sumando estas dos desigualdades obtenemos

$$(F(x') - F(x), x'-x) \geq 0 \qquad x, x' \in \mathbb{E}$$

de donde $F$ es monótona.

□

La proposición 4.2 es también válida considerando $f$ estrictamente convexa y el potencial $\nabla f(x)$ resulta estrictamente monótono, siguiendo el mismo procedimiento.

Sin embargo, no todo operador monótono proviene como un gradiente (o potencial) de funciones convexas. Por ejemplo, consideremos el campo vectorial que no es convexo,

$$F(x) = (x_1, x_2 + \phi(x_1)), \quad x = (x_1, x_2) \in \Re^2$$

donde $\phi$ es una función suave de la variable simple $x_1 \in \Re$ tal que

$$|\phi(x_1) - \phi(x_1')| \leq |x_1 - x_1'| \text{ para } x_1, x_2' \in \Re.$$

De los cálculos tenemos

$$\begin{aligned}
(F(x) - F(x'), x-x') &= ((x_1 - x_1', x_2 - x_2' + \phi(x_1) - \phi(x_1')), (x_1 - x_1', x_2 - x_2')) \\
&= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')(x_2 - x_2' + \phi(x_1) - \phi(x_1')) \\
&= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_2 - x_2')(\phi(x_1) - \phi(x_1')) \\
&\geq \|x - x'\|^2 - |x_2 - x_2'||\phi(x_1) - \phi(x_1')| \\
&\geq \|x - x'\|^2 - \tfrac{1}{2}|x_2 - x_2'|^2 - \tfrac{1}{2}|\phi(x_1) - \phi(x_1')|^2 \geq \tfrac{1}{2}\|x - x'\|^2.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $F(x)$ es monótono y no es convexo.

PROBLEMA 3. Sea $\Re_+^N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Re^N : x_i \geq 0 \text{ para todo } i\}$, un conjunto convexo de $\Re^N$ y sea $F : \Re_+^N \longrightarrow \Re^N$. Hallar $x_0 \in \Re_+^N$ tal que

$$F(x_0) \in \Re_+^N \quad \text{y} \quad (F(x_0), x_0) = 0.$$

Para dar una solución al problema 3, consideremos el siguiente resultado.

TEOREMA 5. *El punto $x_0 \in \Re_+^N$, es una solución para el problema 3, si y sólo si, $x_0 \in \Re_+^N : (F(x_0), y - x_0) \geq 0$ para $y \in \Re_+^N$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que si $x_0$ es solución del problema 3, entonces $(F(x_0),y)\geq 0$ para $y\in\Re_+^N$, así que

$$(F(x_0),y-x_0)=(F(x_0),y)-(F(x_0),x_0)=(F(x_0),y)\geq 0.$$

Recíprocamente supongamos que $x_0\in\Re_+^N$ es una solución para la desigualdad variacional, entonces

$$y=x_0+e_i,\quad e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots 0)\qquad (1 \text{ en el } i-\text{ésimo lugar})$$

es un elemento de $\Re_+^N$, así

$$0\leq (F(x_0),x_0+e_i-x_0)=(F(x_0),e_i)=F_i(x_0) \text{ así, } F(x_0)\in\Re_+^N.$$

Por lo tanto, puesto que $y=0\in\Re_+^N$

$$(F(x_0),x_0)\leq 0$$

(dado que $(F(x_0),y-x_0)\geq 0$ en particular para $y=0$ tenemos que $(F(x_0),-x_0)\geq 0$ de donde la afirmación).

Pero $x_0,F(x_0)\in\Re_+^N$ implica que $(F(x_0),x_0)\geq 0$, así

$$(F(x_0),x_0)=0.$$

□

## §5. DESIGUALDADES VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

### 5.1 FORMAS BILINEALES.

Muchos resultados interesantes en la teoría de desigualdades variacionales pueden ser formulados en términos de formas bilineales en espacios de Hilbert. Esta teoría puede generalizarse a la teoría de problemas de frontera para ecuaciones elípticas lineales.

Sea $H$ un espacio de Hilbert real y $H^*$ su espacio dual. Designamos por $(,)$ el producto interno en $H$, y $\|\|$ su norma, tómese

$$\begin{aligned} H^*\times H &\longrightarrow \Re \\ (f,x) &\longmapsto \langle f,x\rangle \end{aligned}$$

un ligamiento entre $H$ y $H^*$ (también conocida como correspondencia de Clarke).

Sea $\alpha(u,v)$ una forma bilineal (real) en $H$, es decir, $\alpha: H\times H\longrightarrow\Re$ es continua y lineal en cada una de las variables $u,v,$ se dice que la forma bilineal $\alpha(u,v)$ es simétrica si

$$\alpha(u,v)=\alpha(v,u) \quad \text{para } u,v\in H.$$

Una aplicación lineal continua

$$A:\ H\longrightarrow H^*$$

determina una forma bilineal, esto según el teorema de Riesz, vía un ligamiento

$$\alpha(u,v)=\langle Au,v\rangle. \tag{1}$$

Las condiciones de linealidad se verifican y

$$|\alpha(u,v)|\leq c\|u\|\|v\| \text{ para un } c>0$$

lo cual implica que $\alpha$ es continua. Y recíprocamente dada una forma bilineal $\alpha(u,v)$, la aplicación lineal

$$v\longmapsto\alpha(u,v) \text{ para } v\in H$$

determina una transformación lineal continua $A: H\to H^*$ que satisface $(1)$.

DEFINICIÓN 5.1. *La forma bilineal $\alpha(u,v)$ es coerciva en $H$ si existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\alpha(v,v) \geq \lambda \|v\|^2 \qquad \textit{para} \quad v \in H. \tag{2}$$

La forma bilineal $\alpha(u,v)$ es coerciva si y solamente si la aplicación $A$ definida por $(1)$ es coerciva en el sentido de la definición 5.1.
Evidentemente una forma bilineal coerciva $\alpha(u,v)$ define una norma $(\alpha(v,v))^{\frac{1}{2}}$ en $H$ equivale a $\|v\|$.

5.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA DESIGUALDADES VARIACIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT.
Con tal fin consideramos el siguiente problema:

PROBLEMA 4. Sea $\mathbb{K} \subset H$ un conjunto cerrado convexo de un espacio de Hilbert $H$ y $f \in H^*$. Hallar

$u \in \mathbb{K} : \alpha(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle$ para todo $v \in \mathbb{K}$.

La respuesta a este problema la encontramos en el siguiente resultado:

TEOREMA 6. *Sea $\alpha(u,v)$ una forma bilineal coerciva en $H$, $\mathbb{K} \subset H$, cerrado y convexo, $f \in H^*$. Entonces existe una única solución para el problema 4. Además, la aplicación $f \to u$ es Lipschitziana, esto es si $u_1, u_2$ son soluciones del problema 4, correspondiente a $f_1, f_2 \in H^*$ entonces*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \left(\tfrac{1}{\lambda}\right) \|f_1 - f_2\|_{H^*} \tag{3}$$

Obsérvese que la aplicación $f \to u$ es lineal si $\mathbb{K}$ es un subespacio de $H$.
DEMOSTRACIÓN. Iniciamos con la demostración de $(3)$. Supóngase que existe $u_1, u_2 \in H$ soluciones de las desigualdades

$u_i \in \mathbb{K} : \alpha(u_i, v-u_i) \geq \langle f_i, v-u_i \rangle$ para $v \in \mathbb{K}$, $\qquad i = 1,2,$

tomando $v = u_2$ en la desigualdad variacional para $u_1$ y $v = u_1$ en la desigualdad para $u_2$, se obtiene

$i)$ $\alpha(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle f_1, u_2 - u_1 \rangle$, y,
$\alpha(u_2, u_1 - u_2) \geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle$,

sumando obtenemos

$ii)$ $\alpha(u_2, u_1 - u_2) + \alpha(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle f_1, u_2 - u_1 \rangle + \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle$

lo cual es equivalente a

$$\alpha(u_2, u_1 - u_2) - \alpha(u_1, u_1 - u_2) \geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle - \langle f_1, u_1 - u_2 \rangle$$

por la bilinealidad se obtiene

$$\alpha(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq \langle f_2 - f_1, u_1 - u_2 \rangle$$

de donde

$$-\alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq -\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle$$

así

$$\alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Por lo tanto de la coercividad de $\alpha$

$$\lambda \|u_1 - u_2\|^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{H^*} \|u_1 - u_2\|$$

por consiguiente se obtiene $(3)$.
Resta demostrar la existencia de $u,$ la cual presentamos en varios pasos:

1. Suponemos que $\alpha(u,v)$ es simétrica, se define el funcional
$$I(u) = \alpha(u,u) - 2\langle f,u\rangle$$
Sea $d = \inf_{\mathbb{K}} I(u)$, ahora
$$I(u) \geq \lambda\|u\|^2 - 2\|f\|_{H^*}\|u\|_H \geq \lambda\|u\|^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\|f\|^2_{H^*} - \lambda\|u\|^2 = -\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\|f\|^2_{H^*}$$
esto se debe a que
$$(\|f\| - \lambda\|u\|)^2 \geq 0$$
y esto equivale a
$$\|f\|^2 - 2\lambda\|f\|\|u\| + \lambda^2\|u\|^2 \geq 0$$
de donde se tiene
$$-2\|f\|_{H^*}\|u\| \geq -\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\|f\|^2_{H^*} - \lambda\|u\|^2$$
deduciéndose que
$$d \geq -\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\|f\|^2_{H^*} > -\infty$$
Sea $u_n$ una sucesión minimizada de $I$ en $\mathbb{K}$ tal que
$$\left\{u_n \in \mathbb{K};\ d \leq I(u_n) \leq d + \tfrac{1}{n}\right\}.$$
Aplicando la ley del paralelogramo y teniendo en mente que $\mathbb{K}$ es convexo vemos que
$$\begin{aligned}\lambda\|u_n - u_m\|^2 &\leq \alpha(u_n - u_m, u_n - u_m) = 2\alpha(u_n,u_n) + 2\alpha(u_m,u_m)\\ &- 4\alpha\left(\tfrac{1}{2}(u_n+u_m), \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)\right) - 4\langle f,u_n\rangle - 4\langle f,u_m\rangle + 8\langle f, \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)\rangle\\ &= 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I\left(\tfrac{1}{2}(u_n+u_m)\right) \leq 2\left(d + \tfrac{1}{n}\right) + 2\left(d + \tfrac{1}{m}\right) - 4d.\end{aligned}$$
Luego
$$\lambda\|u_n - u_m\|^2 \leq 2\left[\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}\right]$$
Hemos usado que
$$4\langle f,u_n\rangle + 4\langle f,u_m\rangle - 8\langle f, \tfrac{1}{2}(u_n+u_m)\rangle = 0.$$
Por consiguiente la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy y el conjunto $\mathbb{K}$ es cerrado así contiene un elemento $u \in \mathbb{K}$ tal que $u_n \to u$ en $H$ luego $I(u_n) \to I(u)$. Así $I(u) = d$ y para cualquier $v \in \mathbb{K}$ $u + \epsilon(v-u) \in \mathbb{K}, 0 \leq \epsilon \leq 1$ además $I(u + \epsilon(v-u)) \geq I(u)$.
Entonces
$$\alpha(u + \epsilon(v-u), u + \epsilon(v-u)) - 2\langle f, u + \epsilon(v-u)\rangle \geq I(u)$$
ó
$$\alpha(u,u) - 2\langle f,u\rangle + 2\epsilon\alpha(u,v-u) + \epsilon^2\alpha(v-u,v-u) - 2\epsilon\langle f,v-u\rangle \geq I(u)$$
como $I(u) = \alpha(u,u) - 2\langle f,u\rangle$ se sigue que
$$2\epsilon\alpha(u,v-u) + \epsilon^2\alpha(v-u,v-u) - 2\epsilon\langle f,v-u\rangle \geq 0$$
o sea
$$\alpha(u,v-u) \geq \langle f,v-u\rangle - \tfrac{1}{2}\epsilon\alpha\langle v-u,v-u\rangle$$
para todo $\epsilon$ tal que $0 \leq \epsilon \leq 1$. Haciendo $\epsilon = 0$ vemos que $u$ es una solución del problema 4.

2. Tratemos ahora el caso general donde $\alpha(u,v)$ no es simétrica, mediante una perturbación, se introduce la forma bilineal coerciva siguiente

$$\alpha_t(u,v) = \alpha_0(u,v) + tb(u,u), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

donde

$$\alpha_0(u,v) = \tfrac{1}{2}[\alpha(u,v) + \alpha(v,u)]$$

y

$$b(u,v) = \tfrac{1}{2}[\alpha(u,v) - \alpha(v,u)]$$

son las partes simétrica y antisimétrica de $\alpha$. Obsérvese que $\alpha_1(u,v) = \alpha(u,v)$ y que $\alpha_t(u,v)$ es coerciva con la misma constante $\lambda$, pues $\alpha_t(v,v) = \alpha(v,v)$.

LEMA. *Si el problema* $4$ *tiene solución para* $\alpha_\tau(u,v)$ *y todo* $f \in H^*$ *entonces el problema 4 tiene solución para* $\alpha_t(u,v)$ *y todo* $f \in H^*$ *donde* $\tau \leq t \leq \tau + t_0$, $t_0 < \frac{\lambda}{M}$, $M = \sup\frac{|b(u,v)|}{\|u\|\|v\|} < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. Se define la aplicación $T : H \longrightarrow \mathbb{K}$ por $Tw = u$ donde $u$ es la solución del problema

$$u \in \mathbb{K} : \alpha_\tau(u, v-u) \geq \langle F_t, v-u\rangle \text{ para todo } v \in \mathbb{K}$$

donde

$$\langle F_t, v\rangle = \langle f, v\rangle - (t-\tau)b(w,v) \text{ y } \tau \leq t \leq \tau + t_0$$

esta desigualdad siempre tiene solución, dado que, por hipótesis $\alpha_\tau(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle$ tiene solución para todo $f \in H^*$ y en particular para $f = F_t \in H^*$ se tiene solución. Así $T$ está bien definida. Ahora dados $u_1 = Tw_1$, y , $u_2 = Tw_2$ podemos aplicar el hecho de ser $f \rightarrow u$ lipschitziana para obtener que la función $F_t \rightarrow u$ cumple con

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|T\|\|w_1 - w_2\| \leq \tfrac{1}{\lambda}(t-\tau)M\|w_1 - w_2\| \leq \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)t_0 M\|w_1 - w_2\|$$

con $t_0\frac{M}{\lambda} < 1$ (pues $t_0 < \frac{\lambda}{M}$). Por lo tanto $T$ es una aplicación no expansiva y admite un único punto fijo por el teorema $2$ del §2. Para éste se tiene:

$$u \in \mathbb{K} : \alpha_t(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \text{para } v \in \mathbb{K}$$

y para cada $t$, $\tau \leq t \leq \tau + t_0$.

Para completar la demostración del teorema $6$ es suficiente observar que el problema 4 puede ser resuelto para $\alpha_0(u,v)$ la cual es simétrica. Aplicando el lema un número finito de veces vemos que el problema 4 admite una solución para $t = 1$.

## 5.3.UN PROBLEMA VARIACIONAL.

Consideremos un espacio de Banach real $\mathbb{E}$ y $\varphi(u,v)$ una forma bilineal simétrica, continua en $\mathbb{E}$. Para $f$ en el dual $\mathbb{E}^*$ de $\mathbb{E}$, se representa por $\langle f, v\rangle$ al valor $f(v)$. Consideremos el funcional

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\varphi(v,v) - \langle f, v\rangle,$$

definido en una parte $\mathbb{K}$ de $\mathbb{E}$. Se formula a continuación el siguiente problema variacional:

$(I)$ ¿Bajo que condiciones el problema variacional

$$\min_{v \in \mathbb{K}} J(v)$$

posee una única solución en $\mathbb{K}$?
El teorema que sigue da respuesta a la pregunta formulada en $(I)$ con hipótesis adicionales sobre $\mathbb{K}$ y $\varphi(u,v)$.

DEFINICIÓN 5.4. *Se dice que $\varphi(u,v)$ es elíptica, cuando existe una constante positiva $\lambda$ tal que*

$$\varphi(v,v) \geq \lambda \|v\|^2 \text{ para todo } v \in \mathbb{E}.$$

TEOREMA 7. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach y $\varphi(u,v)$ una forma bilineal, simétrica, continua y elíptica en $\mathbb{E}$. Si $\mathbb{K}$ es un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{E}$, entonces el problema variacional $(I)$ posee una única solución $u$, caracterizada por la siguiente desigualdad variacional*

$$\varphi(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \text{ para todo } v \in \mathbb{K}$$

DEMOSTRACIÓN. De hecho, para $v \in \mathbb{E}$ se tiene

$$\lambda \|v\|^2 \leq \varphi(v,v) \leq M\|v\|^2$$

mostrándose así que la norma $\sqrt{\varphi(v,v)}$ es equivalente a la norma original de $\mathbb{E}$. Resulta que $\mathbb{E}$ posee una estructura de espacio de Hilbert. Podemos por lo tanto suponer que $\mathbb{E}$ es un espacio de Hilbert. Del teorema de Riesz-Frèchet se deduce la existencia de un vector $w_f$ en $\mathbb{E}$ tal que

$$\langle f, v \rangle = \phi(w_f, v) \text{ para todo } v \in \mathbb{E}.$$

Por lo tanto

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\varphi(v,v) - \varphi(w_f, v) = \tfrac{1}{2}\varphi(v-w_f, v-w_f) - \tfrac{1}{2}\varphi(w_f, w_f)$$

y el problema variacional $(I)$ se reduce a obtener el mínimo en $\mathbb{K}$ de la forma cuadrática $\varphi(v-w_f, v-w_f)$. Se sabe del §2 que la solución de este problema es dado por la proyección ortogonal sobre $\mathbb{K}$ de $w_f$ según el producto escalar $\varphi(u,v)$ esto es

$$u = p_{\mathbb{K}}^r w_f$$

teniéndose que $u$ es la proyección ortogonal sobre el conjunto convexo $\mathbb{K}$ que es cerrado en $\mathbb{E}$ y esto sucede si y sólo si el ángulo entre $w_f - u$ y $v-u$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$ para todo $v \in \mathbb{K}$. Esto equivale a decir que (ver teorema 1)

$$\varphi(w_f - u, v-u) \leq 0$$

cualquiera sea $v$ en $\mathbb{K}$. De aquí resulta que $u$ es solución del problema variacional $(I)$ si y sólo si

$$\varphi(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle.$$

para todo $v$ en $\mathbb{K}$, pues

$$\varphi(w_f - u, v-u) = \varphi(w_f, v-u) - \varphi(u, v-u) \text{ y } \langle f, v-u \rangle = \varphi(w_f, v-u)$$

□

## §6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

$1$. Sea $a(u,v)$ una forma bilineal coerciva en un espacio de Hilbert real $H$. Sea $\rho$ un número real tal que $0<\rho<2\alpha/c^2$. Demuestre que existe $\theta$, $0<\theta<1$ tal que

$$|(u,v)-\rho a(u,v)|<\theta\|u\|\cdot\|v\| \quad \text{para} \quad u,v\in H.$$

NOTA. $a(u,v)$ es coerciva si existen $c$ y $\alpha$ tales que $(c>0,\alpha>0)$

$$|a(u,v)|\leq c\|u\|\cdot\|v\| \quad \text{y} \quad a(u,v)\geq\alpha\|v\|^2.$$

$2$. Sea $F$ una función convexa de $H$ en $\Re\cup\{+\infty\}$ que es propia. Entonces existe un único $u\in H$ tal que

$$a(u,v-u)+F(v)-F(u)\geq 0 \quad \text{para todo} \quad v\in H.$$

$3$. Una aplicación $F:\Re^N\longrightarrow(\Re^N)^*$ es llamada "cíclicamente monótona" si se tiene

$$\langle F(x_0),x_1-x_0\rangle+\langle F(x_1),x_2-x_1\rangle+\cdots+\langle F(x_n),x_0-x_n\rangle\leq 0$$

para cada conjunto de puntos $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ ($n$ arbitrario). Demostrar que $F(x)=\nabla f(x)=$ gradiente de $f(x)$ es cíclicamente monótona si $f(x)$ es una función convexa de clase $C^1$.

$4$. Sea $F$ una aplicación continua de una bola cerrada $\Sigma\subset\Re^N$ en sí misma. Suponga que el vector $F(x)$ nunca tiene la misma dirección de $x$ para $x\in\partial\Sigma$ (frontera de $\Sigma$). Entonces demuestre que existe $x_0\in\Sigma$ donde $F(x_0)=x_0$.

$5$. Se define la aplicación multivaluada de un conjunto cerrado convexo $\mathbb{K}\subset\Re^N$ en $(\Re^N)^*$: "sea, para $x\in\mathbb{K}$, $\chi(x)=0$ y para $x\in\partial\mathbb{K}$ sea $\chi(x)$ el conjunto de elementos de $(\Re^N)^*$ tales que

$$\langle\chi(x),y-x\rangle\geq 0, \quad \langle\chi(x)y-x\rangle=0$$

son planos soportados de $\mathbb{K}$ en $x$".

Entonces demostrar que para la desigualdad variacional, existe $x\in\mathbb{K}$ tal que $\langle F(x),y-x\rangle\geq 0$ para todo $y\in\mathbb{K}$; puede escribirse como

$$x\in\mathbb{K}:F(x)\in\chi(x).$$

## § 7. VARIACIONES EN ESPACIOS DE BANACH

Desigualdades como $\varphi(u,v-u)\geq\langle f,v-u\rangle$ para $v\in\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{E}$, son denominadas desigualdades variacionales elípticas, que en el caso de las formas simétricas son equivalentes al problema:

¿bajo que condiciones el problema variacional $\underset{v\in K}{Min}\ J(v)$ posee una única solución en $\mathbb{K}$ ?

Seguidamente tomemos una función arbitraria $f$ en lugar de la función convexa particular

$$J(v)=\tfrac{1}{2}\varphi(v,v)-\langle\widetilde{f}\ ,v\rangle$$

definida por una fórmula bilineal de $\mathbb{E}$, $f$ es una función convexa definida en $\mathbb{E}$ y semicontinua inferiormente.
Se formula ahora un segundo problema variacional mediante la pregunta

¿Existe $u$ en $K$ tal que $f(u) = \inf\limits_{v \in K} f(v)$? $(II)$

Para hallar una respuesta satisfactoria se sustituye la forma bilineal elíptica por una función coerciva; recordemos que una función $f : \mathbb{E} \longrightarrow \Re$ es coerciva cuando

$$\lim_{\|v\| \to \infty} f(v) = +\infty$$

TEOREMA 8. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach reflexivo, $\mathbb{K}$ una parte convexa cerrada de $\mathbb{E}$ y $f : \mathbb{K} \longrightarrow \overline{\Re}$ una función convexa propia (ver 2 de los problemas propuestos), semicontinua inferiormente y coerciva. Entonces el problema $(II)$, tiene una solución en $\mathbb{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, existe $\alpha = \inf\limits_{v \in \mathbb{K}} f(v)$ y no puede ser $\alpha = +\infty$, pues $f$ es convexa propia. Luego $-\infty \le \alpha < +\infty$. Mostremos que no se puede tener $\alpha = -\infty$. Sea $u_n \in \mathbb{K}$ una sucesión mínimizada, esto es

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} f(u_n)$$

Veamos que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. En el caso cuando $\mathbb{K}$ es acotada, es inmediato. Supongamos por lo tanto que $\mathbb{K}$ no es acotado. Como $-\infty \le \alpha < +\infty$ resulta de la coercividad que $\{\|u_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Como $\mathbb{E}$ es reflexivo, se concluye que existe una subsucesión $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge débilmente en $\mathbb{E}$ hacia $u$. Dado que $\mathbb{K}$ es cerrado y convexo entonces es débilmente cerrado así $u \in \mathbb{K}$. Se sigue de la semicontinuidad inferior que

$$f(x) \le \liminf_{m \to \infty} f(u_m) = \alpha$$

mostrándose que $\alpha > -\infty$, ya que $f$ no es $-\infty$ en punto alguno.
Siendo $\alpha$ el infimun, se concluye que $\alpha = f(u)$, lo que demuestra el teorema 8.

□

NOTA 1. Se dice que una función convexa es estrictamente convexa cuando en la definición de convexidad vale el signo estricto en la desigualdad. Cuando $f$ es estrictamente convexa entonces la solución $u$ del teorema 8, es única. Realmente suponga que existen dos soluciones $u, v \in \mathbb{K}$; se tiene $\frac{1}{2}(u+v) \in \mathbb{K}$ y

$$f\left(\tfrac{u+v}{2}\right) < \tfrac{1}{2} f(u) + \tfrac{1}{2} f(v) = \alpha$$

que es una contradicción porque $\alpha$ es el infimun.
NOTA 2. El teorema 7, es un caso particular del teorema 8, pues

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\varphi(v,v) - \langle \widetilde{f}\, , v \rangle$$

satisface las condiciones del teorema 8.

En efecto la simetría de $\varphi(u,v)$ implica que $J(v)$ es estrictamente convexa. Resta solamente obtener la desigualdad del teorema 7 que caracteriza la solución del problema variacional $(I)$. Esto se obtendrá a través de la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 7.1. *Si $f$ además de las condiciones del teorema 8 es derivable en el sentido de Gateaux entonces son equivalentes las siguentes afirmaciones*
*1) $u$ es solución del problema variacional $(II)$*
*2) $\langle f'(u), v-u\rangle \geq 0$ para todo $v$ en $\mathbb{K}$.*
DEMOSTRACIÓN. Suponga que $u$ es una solución del problema variacional $(II)$. Resulta que:

$$f(u) \leq f((1-\lambda)u+\lambda v) \quad \text{para todo } v \text{ en } \mathbb{K}$$

esto es

$$\tfrac{1}{\lambda}[f(u+\lambda(v-u))-f(u)] \geq 0. \qquad \lambda > 0$$

Tomando límite cuando $\lambda \to 0^{+}$, siendo $f$ derivable en el sentido de Gateaux, se obtiene

$$\langle f'(u), v-u\rangle \geq 0 \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{K}$$

Recíprocamente, supongamos que existe $u$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$\langle f'(u), v-u\rangle \geq 0 \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{K}$$

Tomando $0<\lambda<1$, se obtiene

$$f((1-\lambda)u+\lambda v)-f(u) \leq (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)-f(u)$$

esto es

$$f(v)-f(u) \geq \tfrac{1}{\lambda}[f(u+\lambda(v-u))-f(u)]$$

Siendo $f$ derivable en el sentido de Gateaux, se obtiene

$$f(v)-f(u) \geq \langle f'(u), v-u\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } v \text{ en } \mathbb{K}$$

NOTA 3. Cuando se tiene una función convexa

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\varphi(v,v) - \langle \widetilde{f}, v\rangle$$

su derivada en el sentido de Gateaux $J'(v)$ es tal que

$$\left\langle J'(u), v\right\rangle = \varphi(u,v) - \left\langle \widetilde{f}, v\right\rangle$$

y la proposición equivale a la desigualdad variacional del teorema 7.

Un ejemplo significativo de un funcional convexo en un espacio de Banach reflexivo es el que trataremos en seguida:

Sea $\Omega$ un dominio acotado de $\Re^{N}$ y $\mathbb{E}$ un espacio de Banach. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$ es reflexivo, siendo su dual el espacio $W^{-1,q}(\Omega)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Considérese el funcional definido en $\mathbb{E}$ por

$$J(v) = \tfrac{1}{p}\int_{\Omega}\|\nabla v\|^{p}dx - \left\langle \widetilde{f}, v\right\rangle$$

para $\widetilde{f} \in \mathbb{E}^{*}$. Entonces la funcional $J$ es estrictamente convexo, diferenciable y coercitivo.

Como se vio, en el caso en que $\varphi(u,v)$ es simétrica, el problema variacional $(I)$ es equivalente a la desigualdad variacional

$$\varphi(u,v-u) \geq \left\langle \widetilde{f}\ , v-u \right\rangle$$

para todo $v \in \mathbb{K}$. Cuando se pierde la simetría, no se obtiene la equivalencia. El teorema que viene en seguida, muestra no obstante, que la desigualdad

$$\varphi(u,v-u) \geq \left\langle \widetilde{f}\ , v-u \right\rangle$$

posee una solución en $\mathbb{K}$ aún cuando se pierda la simétria de la forma $\varphi(u,v)$, siendo $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert real.

TEOREMA 9. *Sea* $\varphi(u,v)$ *una forma bilineal, acotada, coerciva en un espacio de Hilbert* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{K}$ *un conjunto convexo cerrado en* $\mathbb{E}$*. Entonces, para todo* $\widetilde{f}$ *en* $\mathbb{E}^*$ *existe un único* $u$ *en* $\mathbb{K}$ *tal que*

$$\varphi(u,v-u) \geq \left\langle \widetilde{f}\ , v-u \right\rangle$$

*para todo* $v$ *en* $\mathbb{E}$*. La aplicación* $\widetilde{f} \mapsto u$ *en* $\mathbb{E}^*$ *en* $\mathbb{E}$ *es continua.*

DEMOSTRACIÓN. **Unicidad**: Consideremos dos soluciones $u_1, u_2$ en $\mathbb{K}$ correspondientes a $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ elementos de $\mathbb{E}^*$. Se tiene

$$\varphi(u_i, v-u_i) \geq \left\langle \widetilde{f}_i\,, v-u_i \right\rangle \qquad \text{para todo } v \text{ en } \mathbb{K} \text{ e } i=1,2$$

Haciendo $v=u_2$ cuando $i=1$ y $v=u_1$ cuando $i=2$, tenemos

$$\varphi(u_1,u_2-u_1) \geq \left\langle \widetilde{f}_1\,, u_2-u_1 \right\rangle \ \text{ y } \ \varphi(u_2,u_1-u_2) \geq \left\langle \widetilde{f}_2\,, u_1-u_2 \right\rangle$$

sumando miembro a miembro obtenemos

$$\varphi(u_1,u_2-u_1)+\varphi(u_2,u_1-u_2) \geq \left\langle \widetilde{f}_1\,, u_2-u_1 \right\rangle + \left\langle \widetilde{f}_2\,, u_1-u_2 \right\rangle$$

de donde

$$\varphi(u_1-u_2,u_2-u_1) \geq \left\langle \widetilde{f}_2-\widetilde{f}_1\,, u_1-u_2 \right\rangle$$

así

$$\alpha\|u_1-u_2\|^2 \leq \varphi(u_1-u_2,u_1-u_2) \leq \left\langle \widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2\,, u_1-u_2 \right\rangle \leq \left\| \widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2 \right\| \|u_1-u_2\|$$

Como ya lo hemos visto en la prueba del teorema 6, por la coercitividad de $\varphi$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|u_1-u_2\| \leq \left\| \widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2 \right\|_{\mathbb{E}^*}$$

lo cual equivale a

$$\|u_1-u_2\| \leq \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)\left\| \widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2 \right\|_{\mathbb{E}^*}$$

lo que demuestra la dependencia continua de la solución $u$.

**Existencia**: De la acotación de $\varphi(u,v)$ se concluye la existencia de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)$ tal que (recuérdese el teorema de Riesz) $\varphi(u,v) \equiv \left\langle Au, v \right\rangle$ para todo $u,v$ en $\mathbb{E}$

Sean $M=\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)}$ y $\bigwedge$ el isomorfismo canónico de $\mathbb{E}^*$ en $\mathbb{E}$ definido por

$$\left\langle \widetilde{f}\ , v \right\rangle = \left( \bigwedge \widetilde{f}\ |_v \right) \qquad \text{para todo } v \text{ en } \mathbb{E}$$

Teniéndose

$$\|\bigwedge\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)} = \|\bigwedge^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)} = 1$$

LEMA 1. Sea $0<\rho<2\alpha/M^2$. Entonces existe $0<\theta<1$ tal que

$$|(u|v)-\rho\varphi(u,v)|\le\theta\|u\|_0\|v\| \qquad \text{para todo } u,v \text{ en } \mathbb{E}$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, siendo

$$\varphi(u,v)=\langle Au,v\rangle=(\bigwedge Au|v)$$

se obtiene

$$|(u|v)-(\rho\bigwedge Au|v)|=|(u-\rho\bigwedge Au|v)|\le\|u-\rho\bigwedge Au\|\cdot\|v\|$$

Teniéndose

$$\|u-\rho\bigwedge Au\|^2\le\|u\|^2+\rho^2\|\bigwedge Au\|^2-2\rho\varphi(u,u)\le(1+M^2\rho^2-2\alpha\rho)\|u\|^2$$

lo que prueba el lema, pues $0<1+M^2\rho^2-2\alpha\rho<1$.

Para la demostración del teorema, suponga, inicialmente $\varphi(u,v)=(u|v)$. El problema consiste en encontrar $u$ en $K$ tal que

$$(u|v-u)\ge\langle\widetilde{f}\ ,v-u\rangle=\left(\bigwedge\widetilde{f}\ |v-u\right)$$

para todo $v$ en $\mathbb{K}$, o equivalentemente

$$\left(u-\bigwedge\widetilde{f}\ |v-u\right)\ge 0$$

para todo $v$ en $\mathbb{K}$. Del teorema 7 y de la anterior desigualdad se deduce que

$$u=P_K^{roy}\bigwedge\widetilde{f}$$

Aquí $P_K^{roy}$ indica proyección sobre $K$. Suponga ahora que $\varphi(u,v)$ está en las condiciones del teorema, esto es, no necesariamente simétrica y fijo $\rho$ como en el lema 1. Para $u$ en $\mathbb{E}$ sea $\phi(u)\in\mathbb{E}^*$ definido del siguiente modo

$$\langle\phi(u),v\rangle=(u|v)-\rho\varphi(u,v)+\rho\langle\widetilde{f}\ ,v\rangle$$

para todo $v$ en $\mathbb{E}$. Dados $u_1,u_2$ en $\mathbb{E}$, se tiene por el lema 1.

$$\left|\langle\phi(u_1)-\phi(u_2),v\rangle\right|\le|(u_1-u_2|v)-\rho\varphi(u_1-u_2,v)|\le\theta\|u_1-u_2\|\|v\|,\ 0<\theta<1$$

Siendo $\phi(u)\in\mathbb{E}^*$, se concluye del teorema 7 la existencia de un único $w$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$(w|v-w)\ge\langle\phi(u),v-w\rangle$$

para todo $v\in\mathbb{K}$, luego

$$w=P_K^{roy}\bigwedge\phi(u)=Tu$$

teniéndose de este modo que $T$ está definida de $\mathbb{E}$ en $K$. Obteniéndose

$$\begin{aligned}\|Tu_1-Tu_2\|&=\|P_K^{roy}\bigwedge\phi(u_1)-P_K^{roy}\phi(u_2)\|\le\|\phi(u_1)-\phi(u_2)\|\\&\le\theta\|u_1-u_2\|, \qquad\qquad 0<\theta<1\end{aligned}$$

Mostrando que $T:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{K}$ es una contracción. Resulta que existe un único $u$ en $\mathbb{K}$ tal que $Tu=u$. Así, $u$ satisface la siguiente desigualdad

$$(u|v-u)\ge\langle\phi(u),v-u\rangle=(u|v-u)-\rho\varphi(u,u-v)+\rho\langle\widetilde{f}\ ,v-u\rangle$$

para todo $v$ en $\mathbb{K}$, esto es

$$\varphi(u,v-u)\ge\langle\widetilde{f}\ ,v-u\rangle \qquad \text{para todo } v\in\mathbb{K}$$

□

Cuando se toma $\mathbb{K}=\mathbb{E}$ y haciendo $v=u\pm\varphi$ en el teorema 9 se obtiene

$$\varphi(u,\theta)=\langle\widetilde{f}\ ,\theta\rangle \qquad \text{para todo } \theta\in\mathbb{K}$$

y en este caso particular el teorema 9 es conocido bajo la denominación de Lema de Lax-Milgram.

## §8.GRADIENTE GENERALIZADO

Como lo hemos venido considerando en las secciones anteriores, $\mathbb{E}$ denotará un espacio de Banach y $\mathbb{E}^*$ su espacio dual, $\langle x^*, x\rangle$ para $x \in \mathbb{E}$, $x^* \in \mathbb{E}^*$ denotará la dualidad. Sea $f : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\Re}$ una función continua localmente Lipschitziana, es decir para cada $x \in \mathbb{E}$, existe una vecindad $N$ de $x$ y una constante $k$ dependiente de $N$ tal que

$$|f(y) - f(z)| \leq k\|y - z\| \quad \text{para cada } y, z \in N$$

DEFINICIÓN 8.1. *Para cada $v \in \mathbb{E}$, definimos la derivada direccional generalizada $f^0(x; v)$ en la dirección de $v$ como*

$$f^0(x; v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda}\right]$$

*(aquí lógicamente $h \in \mathbb{E}$, $\lambda \in (0, +\infty)$ y se supone que $f$ es una función Lipschtziana).*

Se tienen las siguientes propiedades básicas:

$(1)$ La función $v \mapsto f^0(x; v)$ es subaditiva, positivamente homogénea entonces $f$ es una función convexa.

En efecto, sean $v_1$ y $v_2$ dados entonces

$$f^0(x; v_1 + v_2) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+\lambda v_1+\lambda v_2) - f(x+h)}{\lambda}\right]$$

$$\leq \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+\lambda v_1+\lambda v_2) - f(x+h+\lambda v_2)}{\lambda}\right] + \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+\lambda v_2) - f(x+h)}{\lambda}\right]$$

$$= f^0(x; v_1) + f^0(x; v_2)$$

$$f^0(x, \alpha v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+\lambda\alpha v) - f(x+h)}{\lambda}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha > 0}}{=} \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \alpha \left[\frac{f(x+h+(\lambda\alpha)v) - f(x+h)}{\alpha\lambda}\right]$$

$$= \alpha \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \alpha\lambda \downarrow 0}} \left[\frac{f(x+h+(\lambda\alpha)v) - f(x+h)}{\alpha\lambda}\right] = \alpha f^0(x; v)$$

Se sigue la convexidad de $f^0(x, \cdot) : \mathbb{E} \longrightarrow \Re$

$$f^0(x; \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \leq f^0(x; \lambda v_1) + f^0(x; (1-\lambda)v_2) = \lambda f^0(x; v_1) + (1-\lambda) f^0(x; v_2)$$

para todo $\lambda \in (0, 1)$.

$(2)$ $\quad |f^0(x; v)| \leq K\|v\|$

Claramente ya que

$$|f^0(x; v)| \leq \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}\Big|f(x+h+\lambda v) - f(x+h)\Big| \leq \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} k\|x+h+\lambda v - (x+h)\|$$

$$= k\|v\|$$

donde $k$ es la constante de Lipschitz.

$(3)$ La función $v \mapsto f^0(x;v)$ es continua
En efecto, por $(1)$ y $(2)$ se tiene

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq f^0(x;u-v) \leq k\|u-v\|$$
$$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq f^0(x;v-u) \leq k\|v-u\|$$

por lo tanto

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq k\|u-v\|$$

$(4)$ $\quad f^0(x;-v) = (-f)^0(x;v)$
En efecto,

$$\begin{aligned} f^0(x;-v) &= \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\tfrac{f(x+h-\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}\right] \\ &= \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \left[\tfrac{-f(x+(h-\lambda v)-\lambda v)-(-f(x+(h-\lambda v)))}{\lambda}\right] \\ &= (-f)^0(x;v). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 8.2 (F.H.Clarke). El ***gradiente generalizado*** de $f$ en $x$, denotado por $\partial f$ está definido como la subdiferencial de la función convexa $f^0(x;v)$ en $0$. Esto es $w \in \partial f(x) \subset \mathbb{E}^*$ si y sólo si para todo $v \in \mathbb{E}$ $\langle w,v \rangle \leq f^0(x;v)$.
NOTA: En esta definición se supone que $f$ es localmente Lipschitziana

## 8.3.PROPIEDADES DEL GRADIENTE GENERALIZADO

$(1)$ $\partial f(x)$ *es un subconjunto convexo, débilmente compacto no vacío de* $\mathbb{E}^*$.
En efecto, sean $w_1, w_2 \in \partial f(x)$ esto es $\langle w_1,v \rangle \leq f^0(x;v)$, $\langle w_2,v \rangle \leq f^0(x;v)$, ahora

$$\langle \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2, v \rangle = \lambda\langle w_1,v \rangle + (1-\lambda)\langle w_2,v \rangle \leq \lambda f^0(x;v) + (1-\lambda)f^0(x;v)$$

esto es

$$\langle \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2, v \rangle \leq f^0(x;v) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{E}$$

así $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \in \partial f$ de donde $\partial f$ es convexo.
Para ver que $\partial f(x)$ es débilmente compacto, sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de $\partial f(x)$, entonces $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones lineales continuas de $\mathbb{E}$, pues para todo $n$, $w_n \in \mathbb{E}^*$ y de las propiedades $(2)$ y $(3)$ de la definición de derivada generalizada, se obtiene la continuidad de las $w_n$ para todo $n$, luego la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial f(x)$ tiene una subsucesión débilmente convergente, de donde $\partial f(x)$ es débilmente compacto.

$(2)$ *Para cada* $w \in \partial f(x)$, *tenemos* $\|w\|_{\mathbb{E}^*} \leq K$
En efecto;

$$\|w\|_{\mathbb{E}^*} = \sup_{\|v\|=1} |w(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle w,v \rangle| \leq \sup_{\|v\|=1} |f^0(x;v)| \leq \sup_{\|v\|=1} K\|v\| = K$$

$(3)$ *Sean* $f, g : X \longrightarrow \Re$ *funciones localmente Lipschitzianas, entonces*

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

PRUEBA: Sabemos que si $\Omega \subset \mathbb{E}^*$ es débilmente compacto, entonces $\partial f(x) \subseteq \Omega$ si y sólo si $(\forall v \in \mathbb{E})(f^0(x;v) \leq \max\{(v,w); w \in \Omega\})$
Antes mostremos esta equivalencia; $\rightarrow$) Se tiene la siguiente contenencia

$$\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\} \subseteq \{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \Omega\}$$

luego tomando el máximo se tiene

$$\max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\} \leq \max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \Omega\} \qquad (1)$$

$\leftarrow$) Suponiendo ahora algún elemento $\xi \in \partial f(x)$ y $\xi \notin \Omega$, entonces por el teorema de separación existe un elemento $v \in \mathbb{E}$ tal que

$$\langle \xi, v\rangle > \max\{\langle v, w\rangle : w \in \Omega\}$$

Esto contradice a $(1)$, pues en realidad

$$f^0(x;v) = \max\{\langle v, w\rangle; w \in \Omega\}$$

como se probará más tarde.
Usando este hecho con $f+g$ reemplazando a $f$ y $\Omega \equiv \partial f(x) + \partial g(x)$. El lado derecho de la desiguadad es considerado como $f^0(x,v) + g^0(x,v)$ mientras el lado izquierdo de la desigualdad es $(f+g)^0(x,v)$. El resultado se sigue ahora observando que $(f+g)^0$ no es más grande que $f^0 + g^0$.

(4) $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$ para todo $\lambda \in \Re$
PRUEBA: Si $\lambda \geq 0$ esta igualdad es trivial ya que $w \in \partial(\lambda f)(x)$ si y sólo si

$$\langle w, v\rangle \leq (\lambda f)^0(x;v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \theta \downarrow 0}} \frac{\lambda f(x+h+\theta v) - \lambda f(x+h)}{\theta}$$

$$= \lambda \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \theta \downarrow 0}} \frac{f(x+h+\theta v) - f(x+h)}{\theta} = \lambda f^0(x;v), \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{E}$$

Luego $w \in \lambda \partial f(x)$.
Para $\lambda = -1$, se sigue fácilmente pues ya se mostró que $f^0(x;-v) = (-f)^0(x;v)$.

$(5)$ *Si $f$ es convexa, entonces $\partial f(x)$ coincide con la subdiferencial de $f$ en el sentido del análisis convexo.*
PRUEBA. Denotemos la subdiferencial de $f$ por $\partial_* f$. Es conocido que existe la derivada direccional $f'(x;v)$ usual y $f'(x;)$ es el soporte funcional de $\partial_* f$.
Puesto que los conjuntos convexos débilmente compactos son caracterizados por su soporte funcional, es suficiente probar que $f' = f^0$. Evidentemente $f' \leq f^0$. Ahora para $v$ dado, si $h_i$ es una sucesión que converge a cero en $\mathbb{E}$ y sea $\lambda_i$ una sucesión decreciente a cero, entonces existen $\lambda_i^*$ en $(0, \lambda_i)$ y $\xi_i$ en $\partial_* f(x + h_i + \lambda_i^* v)$ de tal manera que

$$\frac{[f(x+h_i+\lambda_i v) - f(x+h_i)]}{\lambda_i} = \langle v, \xi_i\rangle$$

Podemos (tomando una subsucesión si es el caso) suponer que $\xi_i \to \xi$, necesariamente $\xi$ pertenece a $\partial_* f(x)$. Deduciéndose entonces que

$$f^0(x;v) \leq \max\{\langle v, \xi\rangle; \xi \in \partial_* f(x)\} = f'(x;v).$$

PROPOSICIÓN.8.4. *Supongamos que para cada punto* $y$*, en una vecindad de* $x$*,* $f$ *admite una derivada en el sentido de Gateaux* $Df(y)$*, y que* $Df{:}\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}^*$ *es continua. Entonces* $\partial f(x)=\{Df(x)\}$

PRUEBA. Para cualquier $h$ en $\mathbb{E}$ y $\lambda>0$ tal que $\|h\|+\lambda$ es suficientemente pequeño, la función $g(t)=f(x+h+tv)$ es diferenciable en $[0,\lambda]$, con

$$g'(t)=\langle v,Df(x+h+tv)\rangle$$

Por el teorema del valor medio, hay un $\lambda^*$ en $(0,\lambda)$ tal que

$$\frac{[f(x+h+\lambda v)-f(x+h)]}{\lambda}=\langle v,Df(x+h+\lambda^* v)\rangle$$

De aquí deducimos que

$$f^0(x;v)=\langle v,Df(x)\rangle$$

Como $v$ es arbitrario, el resultado se sigue de la siguiente afirmación:
Sea $\Omega$ un subconjunto débilmente compacto convexo no vacío en $\mathbb{E}^*$ entonces

$$\partial f(x)\subseteq\Omega\Leftrightarrow(\forall v\in\mathbb{E})(f^0(x;v)\le\max\{\langle v,w\rangle;w\in\Omega\}).$$

$(6)$ *La aplicación de conjuntos valuados* $x\mapsto\partial f(x)$ *es suficientemente semicontinua en el sentido de que para cada* $x_0\in\mathbb{E},\ \epsilon>0,\ v\in\mathbb{E},$ *existe* $\delta>0$ *tal que, para cada* $w\in\partial f(x)$ *con* $\|x-x_0\|<\delta$*, existe un* $w_0\in\partial f(x_0)$ *de manera que*

$$|\langle w-w_0,v\rangle|<\epsilon$$

PRUEBA. Si fuese falso, entonces tendríamos un $x_0\in\mathbb{E}$, un elemento $v\in\mathbb{E}$ un número positivo $\epsilon_0>0$ y sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{E}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\partial f(x_n)$ tales que $\|x_n-x_0\|<1/n$ y $|(\xi_n-w,v)|>\epsilon$ para cada $w\in\partial f(x_0)$.
Puesto que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una vecindad de $x_0$, según la propiedad $(2)$ se tiene $\|\xi_n\|_{\mathbb{E}^*}\le k$ así que existe una subsucesión $\xi_{n_i}\overset{w}{\to}\xi_0$ débilmente (con la topología débil). Ahora vamos a probar que $\xi_0\in\partial f(x_0)$. En efecto para cada $u\in\mathbb{E}$ existe $h_i\to0,\ \lambda_i\downarrow0$ tal que

$$\frac{|f(x_{n_i}+h_i+\lambda_i u)-f(x_{n_i}+h_i)|}{\lambda_i}>\langle\xi_{n_i},u\rangle-\frac{1}{i},\qquad i=1,2,3,\ldots$$

Siguiéndose que $f^0(x_0,u)\ge\langle\xi_0,u\rangle$ para cada $u\in\mathbb{E}$ esto significa que $\xi_0\in\partial f(x_0)$. Ahora si sustituímos $w=\xi_0$ en la hipótesis encontramos que

$$|\langle\xi_n-\xi_0,v\rangle|>\epsilon\ \wedge\ \xi_n\overset{w}{\to}\xi_0$$

lo cual $(\rightarrow\!\leftarrow)$ es contradictorio.

$(7)$ *La función* $\lambda(x)=\min\limits_{w\,\in\,\partial f(x)}\|w\|_{\mathbb{E}^*}$ *existe, y es semicontinua inferiormente, es decir, se tiene* $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)\ge\lambda(x_0)$*.*

PRUEBA. Puesto que $\partial f(x)$ es un conjunto no vacío, convexo, débilmente compacto y la función $w\to\|w\|_{\mathbb{E}^*}$ es débilmente semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, así que para cada $x_0\in\mathbb{E}$ existe un $w_0\in\partial f(x_0)$ tal que

$$\|w_0\|_{\mathbb{E}^*}=\inf_{w\,\in\,\partial f(x_0)}\|w\|_{\mathbb{E}^*}$$

La inferiormente semicontinuidad de la función $\lambda(x)$ es probada como sigue: Supóngase que no cumple la desigualdad, así, existe una sucesión $x_n \to x_0$, de manera que $\lim_{n\to\infty} \lambda(x_n) < \lambda(x_0)$, y un $w_n \in \partial f(x_n)$ tal que $\|w_n\|_{\mathbb{E}^*} = \lambda(x_n)$, entonces podríamos escoger una subsucesión $w_{n_i} \to w_0 \in \partial f(x_0)$ y se tendría entonces que $\lim_{i\to\infty} \|w_{n_i}\| \geq \|w_0\| \geq \lambda(x_0)$ obteniéndose $(\rightarrow\!\leftarrow)$ así una contradicción.

$(8)$ *Para cada* $v \in \mathbb{E}$, $f^0(x,v) = \max\{(\xi,v)/\xi \in \partial f(x)\}$

PRUEBA. En efecto, como $\xi \in \partial f(x)$ significa que $\langle \xi, v\rangle \leq f^0(x;v)$ esto significa que el conjunto $\{\langle \xi, v\rangle/\xi \in \partial f(x)\}$ es un conjunto acotado superiormente y por las propiedades de los números reales se sigue que $f^0(x;v)$ es el máximo del conjunto.

$(9)$ *Sea* $\phi(t) \in \mathcal{C}^1([0,1] \longrightarrow \mathbb{E})$ *y* $f : \mathbb{E} \longrightarrow \Re$ *una función localmente Lipschitziana entonces la función* $h = f \circ \phi$ *es diferenciable casi en toda parte y*

$$h'(t) \leq \max\{\langle w, \phi'(t)\rangle/w \in \partial(\phi(t))\}\ a.e$$

PRUEBA. La función $h(t)$ es localmente Lipschitziana, así es diferenciable en casi toda parte, suponiendo que es diferenciable en $t = t_0$, entonces

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= \lim_{\lambda\to 0} \tfrac{f(\phi(t_0+\lambda)) - f(\phi(t_0))}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \tfrac{f(\phi(t_0)+\phi'(t_0)\lambda + 0(\lambda)) - f(\phi(t_0))}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \tfrac{f(\phi(t_0)+\phi'(t_0)\lambda) - f(\phi(t_0))}{\lambda} \leq \limsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\downarrow 0}} \tfrac{f(\phi(t_0)+h+\phi'(t_0)\lambda) - f(\phi(t_0)+h)}{\lambda} \\ &= f^0(\phi(t_0);\phi'(t_0)) = \max\{\langle w, \phi'(t_0)\rangle/w \in \partial f(\phi(t_0))\}. \end{aligned}$$

$(10)$ *Si* $x$ *es un mínimo local para* $f$, *entonces* $0 \in \partial f(x)$.

PRUEBA. Cuando $f$ tiene un mínimo local en $x$ entonces $f^0(x;v)$ es no negativo para todo $v$. El resultado se sigue fácilmente de la definición, pues $(\forall v \in \mathbb{E})(\langle 0, v\rangle = 0 \leq f^0(x;v))$ si y sólo si $0 \in \partial f(x)$.

PROPOSICIÓN 8.5. *Sea* $\xi_i$ *perteneciente a* $\partial f(x_i)$ *para* $i = 1, 2, \ldots,$ *y supóngase que* $x_i \to x$ *y* $\xi_i \to \xi$. *Entonces* $\xi \in \partial f(x)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v$ cualquier elemento de $\mathbb{E}$ dado. Tenemos

$$f^0(x_i, v) \geq \langle v, \xi_i\rangle$$

así existe $h_i$ en $\mathbb{E}$ y $\lambda_i > 0$ tal que

$$\tfrac{[f(x_i+h_i+\lambda_i v) - f(x_i+h_i)]}{\lambda_i} > \langle v, \xi_i\rangle - \tfrac{1}{i}$$

y tal que $\|h_i\| + \lambda_i$ es menor que $\frac{1}{i}$. Puesto que $\langle v, \xi_i\rangle$ converge a $\langle v, \xi\rangle$ se sigue de lo anterior que

$$f^0(x;v) \geq \langle v, \xi\rangle.$$

Puesto que $v$ es arbitrario, $\xi$ pertenece a $\partial f(x)$ según la definición.

□

PROPOSICIÓN 8.6. Sea $h : \Re \longrightarrow \Re$ de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces

$$\partial(h \circ f)(x) \subset h'(f(x))\partial f(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin perder generalidad que $h'(f(x))$ es no negativa. Denotemos por $\Omega$ el lado derecho de la inclusión supuesta. Entonces, para cada $v$

$$\max\{\langle v,w\rangle; w \in \Omega\} = h'(f(x)) \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{[f(x+\overline{h}+\lambda v)-f(x+\overline{h})]}{\lambda}$$

$$\geq \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{[h \cdot f(x+\overline{h}+\lambda v)-hf(x+\overline{h})]}{\lambda} = (hf)^0(x;v)$$

(la desigualdad es una consecuencia del teorema del valor medio).

El resultado se sigue ahora de aquel que ya mostramos en $(3)$, dice que si $\Omega \subseteq \mathbb{E}^*$ es débilmente compacto, entonces $\partial f(x) \subseteq \Omega$ si y sólo si para todo $v \in \mathbb{E}$, $f^0(x;v) \leq \max\{\langle v,w\rangle; w \in \Omega\}$.

□

## BIBLIOGRAFIA.


[1] Browder,F., *Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces.* Bull.Amer.Math.Soc.71(1965) 780-785

[2] Browder,F., *On a theorem of Beurling and Livingston*. Canad. J. Math.17 (1965), 367-372.

[3] Brézis, Haïm., *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial. (1984).

[4] Castro,A. *Métodos Variacionales y Análisis Funcional no Lineal*. Paipa, julio 1980. U.P.T.C

[5] Castro,A. *Métodos de reducción via Minimax*. Medellín, agosto de 1981.

[6] D'Ambrosio Ubiratan., *Cálculo de Variacionas*. Monografías elementales IV. Sociedad Colombiana de Matemáticas.

[7] Hartman,P. and Stampacchia, G., *On some nonlinear elliptic differential functional equations.* Acta Math. 115 (1966), 153-188.

[8] Horváth,J.*Topological Vector Spaces and Distributions, vol.1* Addison-Wesley Publishing Company.1966

[9] Moreau, J.J.,*Principles extremaux pour le probleme de la naissance de la cavitation*. J.Mécanique 5 (1966), 439-470.

[10] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis.* Princeton Univ. Princeton. New Jersy, 1970.

[11] Stampacchia, G., *Variational inequalities, theory and applications of monotone operators*. Proc.NATO. Adv. Study Inst. Oderisi-Gubbio (1969).

АЖЙ ЛЛЭЮ

*Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje del análisis no lineal.*

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora quien leyó los originales y cuidó del buen manejo del lenguaje español.

*Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:*

danojuanos@hotmail.com,
danojuanos@tutopia.com
danojuanos@yahoo.com