

## APORTES

# ALTERNATIVA DE ROUCHE-FROBENIUS

*José Darío Sánchez Hernández*  
*Bogotá -Colombia. junio - 2006*  
*[danojuanos@hotmail.com](mailto:danojuanos@hotmail.com)*  
*[danojuanos@tutopia.com](mailto:danojuanos@tutopia.com)*  
*[danojuanos@yahoo.com](mailto:danojuanos@yahoo.com)*

**Resumen.** Se presenta la alternativa de Rouché-Frobenius para problemas lineales que se suelen utilizar en el análisis variacional y en la teoría de ecuaciones diferenciales. Se desarrolla la alternativa de Rouché-Frobenius para un operador de segundo orden, finalmente se presentan las ecuaciones integrales y la alternativa de Fredholm como una generalización de la de Rouché-Frobenius.

## 1. INTRODUCCION

El objeto del presente artículo es mostrar cómo un concepto elemental del álgebra lineal, evoluciona y se transforma en una herramienta básica en el estudio de las ecuaciones, mediante la utilización de los operadores lineales.

Iniciamos destacando el siguiente concepto:

Dados una proposición condicional  $(\mathfrak{S}(x)/x \in \mathcal{U})$  donde  $\mathcal{U}$  es un universo dado y  $\Gamma = \{x \in \mathcal{U}/\Gamma(x) \text{ es verdadera}\}$ , el *conjunto de verdad* de  $\mathfrak{S}(x)$ .

Cuando  $y \in \Gamma$  diremos que  $y$  *verifica* a  $\Gamma$ . En adelante nuestro universo  $\mathcal{U}$  es un espacio vectorial  $\mathbb{E}$ .

**DEFINICION 1.1.** *Un problema lineal homogéneo es la determinación de un elemento  $y$  en un espacio vectorial  $\mathbb{E}$  mediante ciertas condiciones, de manera que su conjunto de verdad  $\Gamma$  sea tal que :*

*PL<sub>1</sub>. Si  $y$  verifica a  $\Gamma$  entonces  $cy$  también verifica a  $\Gamma$ .*

*PL<sub>2</sub>. Si  $y_1$  y  $y_2$  verifican a  $\Gamma$  entonces también  $y_1 + y_2$  verifica a  $\Gamma$ .*

Como consecuencia de  $PL_1$  y  $PL_2$  toda combinación lineal  $c_1y_1 + c_2y_2$  también verifica a  $\Gamma$ .

Notacionalmente se pueden representar los problemas lineales por

$$L_i[u_j] = 0, \quad \text{o} \quad l_i(u_j, u'_j) = 0.$$

Se tiene un *problema no homogéneo* cuando estas ecuaciones son del tipo

$$L_i[u_j] = h_i(x), \quad \text{o} \quad l_i(u_j, u'_j) = k_i(x).$$

Los elementos  $y$  en los problemas lineales serán vectores en el caso de los sistemas lineales algebraicos o funciones de una variable en el de las ecuaciones diferenciales ordinarias o funciones de varias variables, en el caso de las ecuaciones diferenciales parciales. A estos elementos se les conoce como *soluciones del problema lineal* correspondiente.

La condición de linealidad  $\Gamma$  puede presentarse en diversos modelos los cuales abarcan multitud de problemas físicos y de algoritmos matemáticos. He aquí los tres tipos más importantes de problemas lineales

1. Si la  $y$  es vector de  $\mathbb{E}_n$ , entonces es solución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas homogéneas o no homogéneas, en este caso define por sí sola un problema lineal.

2. Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$L(y) \equiv r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

no define por sí sola un problema lineal, no obstante satisface a las exigencias  $PL_1$  y  $PL_2$  de la definición 1.1, pues necesita para la determinación de  $y$  de *condiciones complementarias*. Así por ejemplo si las condiciones iniciales son

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

las cuales se conocen como "*condiciones de Cauchy*", la solución queda determinada.

3. Como límite de los sistemas lineales algebraicos

$$\text{HOMOGÉNEO} \\ \sum k_{rs}x_s = 0$$

$$\text{NO HOMOGÉNEO} \\ \sum k_{rs}x_s = h_r$$

cuando la matriz  $\{k_{rs}\}$  formada por  $n^2$  números, se sustituye por una función continua  $k(r, s)$  definida en el cuadrado  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , resultan las llamadas *ecuaciones integrales de primera especie*

$$\text{HOMOGÉNEO} \quad \int_0^1 k(r, s)x(s)ds = 0 \quad \text{NO HOMOGÉNEO} \\ \int_0^1 k(r, s)x(s)ds = h(r)$$

Estas por sí solas definen problemas lineales, sin condiciones complementarias.

## 2. LA ALTERNATIVA EN LA DETERMINACION DE LAS SOLUCIONES.

Es conocido al estudiar los sistemas algebraicos de ecuaciones lineales, la importante *regla de Cramer*, para la determinación de

las soluciones en el caso  $n \times n$ , recordémosla : sea  $AX = b$  un sistema de ecuaciones en donde  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  es una matriz de orden  $n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el vector de las incógnitas y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  es el vector de las constantes, entonces tenemos :

1. Si  $b \neq 0$  y  $\det A \neq 0$  entonces

$$x_i = \frac{\det(A_1, A_2, \dots, b, \dots, A_n)}{\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

donde  $A_k$  es la  $k$ -ésima columna de la matriz  $A$ , y  $\det$  es usado para indicar el determinante.

2. Si  $b = 0$  y  $\det A \neq 0$  entonces  $X = 0$  es la única solución.

3. Si  $b = 0$  y  $\det A = 0$  entonces existen infinitas soluciones para  $X$ .

4. Si  $b \neq 0$  y  $\det A = 0$  la solución del sistema es inconsistente.

Para el caso de los sistemas  $n \times m$  se tiene una *alternativa* conocida como de *Rouché-Frobenius*, la cual enuncio en la forma original como fue dada por los autores (R. Pastor, P. Calleja, C. Trejo. 1959)

**ALTERNATIVA DE ROUCHE-FROBENIUS:** (a) *La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal tenga solución, es que la matriz de los coeficientes y la matriz aumentada con los términos constantes tengan el mismo rango*

(b) *Si el rango  $h$  es igual al número de incógnitas la solución es única; si  $h < m$ , entonces hay infinitas soluciones, cada una de las cuales está determinada dando un sistema arbitrario de valores a las  $m - h$  incógnitas principales.*

Hagamos algunas reflexiones sobre la anterior afirmación dada por Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones lineales y su correspondiente sistema homogéneo, solo caben dos casos, a saber:

*Caso regular:* Si el sistema homogéneo carece de soluciones ( fuera de la trivial  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ ), entonces el sistema no homogéneo tiene solución única.

*Caso singular:* Si el sistema homogéneo tiene soluciones (no triviales), entonces el sistema no homogéneo no es determinado (en general es imposible, pero puede ser indeterminado).

Aquí hemos llamado *imposible* al problema homogéneo cuando sólo admite solución trivial, esta alternativa puede esquematizarse así:

**PROBLEMA HOMOGÉNEO**  
imposible  
posible

↔

**PROBLEMA NO HOMOGÉNEO**  
determinado  
imposible o indeterminado

El anterior resultado se interpreta actualmente en la siguiente forma:

**ALTERNATIVA DE ROUCHE-FROBENIUS:** Consideremos los sistemas

$$\begin{array}{ll} \text{homogéneo} & \text{no homogéneo} \\ A(X) = 0 & A(X) = b \end{array}$$

en donde  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación lineal.

**La alternativa dice:** O el sistema homogéneo tiene solamente la solución  $X = 0$ , en cuyo caso el sistema no homogéneo tiene solución única, o el sistema homogéneo tiene  $k = n - \text{Rango}(A)$  soluciones linealmente independientes,  $X_1, \dots, X_k$ , en cuyo caso el sistema homogéneo adjunto

$$A'(X) = 0$$

tiene  $k$  soluciones linealmente independientes,  $X'_1, \dots, X'_k$ , y el sistema no homogéneo tiene solución si  $b \in [\text{Núcleo}(A)]^\perp$

### 3. PROBLEMAS CON CONTORNO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES SIN PARAMETRO.

Consideremos la ecuación diferencial lineal general de segundo orden (D.Sánchez 1995)

$$L(y) \equiv r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

con funciones coeficientes continuas en un intervalo  $[a, b]$ , como se manifestó en [2], son necesarias condiciones adicionales para la determinación de la solución  $y$ , por eso tomamos condiciones de contorno en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , las cuales clasificamos así:

*Tipo A.* Ordenadas nulas:  $y(a) = 0, y(b) = 0$

*Tipo B.* Pendientes nulas:  $y'(a) = 0, y'(b) = 0$

*Tipo C.* Problemas mixtos de contorno:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son constantes, estas son conocidas como *condiciones homogéneas de Robin*.

Se puede mostrar que si las condiciones de *tipo C* determinan soluciones linealmente independientes  $y_1$  y  $y_2$ , la solución integral será de la forma  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , entonces las constantes  $c_1, c_2$  están ligadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1[\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a)] + c_2[\alpha y_2(a) + \beta y_2'(a)] &= 0 \\ c_1[\gamma y_1(b) + \delta y_1'(b)] + c_2[\gamma y_2(b) + \delta y_2'(b)] &= 0 \end{aligned}$$

Esto se debe al hecho de que

$$B_1[y] = \alpha y(a) + \beta y'(a) \quad \text{y} \quad B_2[y] = \gamma y(b) + \delta y'(b)$$

son operadores lineales, lo cual es un ejercicio muy fácil de ver, y al hecho de que  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  debe cumplir la condición de *Robin*. Sea ahora

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) & \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) \\ \gamma y_1(b) + \delta y_1'(b) & \gamma y_2(b) + \delta y_2'(b) \end{vmatrix}$$

el determinante del sistema para  $c_1, c_2$ , así se sigue de la *regla de Cramer* que una condición necesaria y suficiente para que  $y$  sea solución del problema

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ B_1[y] = 0, B_2[y] = 0 \end{cases}$$

es que  $\Delta = 0$ .

Para el *tipo A*, la condición será:

$$y_1(a)y_2(b) = y_1(b)y_2(a)$$

y para el *tipo B*, la condición es:

$$y_1'(a)y_2'(b) = y_1'(b)y_2'(a).$$

Hemos así demostrado el siguiente resultado:

**TEOREMA 1.** *El problema lineal homogéneo dado por*

$$\begin{cases} L[y] \equiv r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ B_1[y] = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ B_2[y] = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \end{cases}$$

*es en general imposible. Una condición necesaria para que sea posible es que  $\Delta = 0$ , y entonces hay una solución (salvo un factor numérico arbitrario).*

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$y'' + p(x)y' + [u(x) + \lambda v(x)]y = 0 \quad (3.1)$$

es llamada "*ecuación diferencial con un parámetro*". Dado que ésta ecuación se puede escribir en la forma

$$y'' + p(x)y' + u(x)y = -\lambda v(x)y \quad (3.2)$$

y como  $L[y] = y'' + p(x)y' + u(x)y$  es un operador lineal, entonces la ecuación (3.1) nos representa un procedimiento para calcular las autofunciones y los autovalores del operador  $L$ , este es el caso de los problemas de Sturm–Liouville.

#### 4. LA ALTERNATIVA EN OPERADORES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ m_1y(a) + n_1y'(a) + p_1y(b) + q_1y'(b) = h_1 \\ m_2y(a) + n_2y'(a) + p_2y(b) + q_2y'(b) = h_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  y se supone que  $a_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $a_0(x) \neq 0$  si  $x \in [a, b]$ ; salvo mención en contrario, supondremos que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ .

Las condiciones de contorno conocidas como *condiciones no homogéneas de Robin* se pueden escribir matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Merecerán especial atención los siguientes casos particulares:

$$\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{bmatrix}$$

estas son llamadas *condiciones separadas*, o, *de Sturm* y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

constituyen las conocidas *condiciones periódicas*.

Estos dos casos particulares tienen propiedades interesantes y además aparecerán con frecuencia al resolver los problemas de ecuaciones en derivadas parciales por el método de Fourier. Cuando  $h_1 = h_2 = 0$ , se dirá que se trata del problema de contorno con condiciones homogéneas.

La primera cuestión que se plantea es la existencia y unicidad de soluciones del problema de contorno (4.1). Téngase en cuenta que se trata de un problema en donde hay que hallar la solución de manera que esté definida en todo el intervalo  $[a, b]$  y las condiciones se dan en los extremos. El método de soluciones en este caso es una cuestión de álgebra lineal elemental y representa un modelo muy interesante de argumentar: "*La reducción de la demostración de existencia a la prueba de unicidad para un problema asociado*". Este método se basa en aplicar la alternativa de Rouché–Frobenius al sistema algebraico lineal obtenido y puede extenderse a la teoría de ecuaciones integrales y a contextos más generales. Nos referiremos a este tipo de resultados como a los *Teoremas de Alternativa*. Por brevedad vamos a usar la siguiente notación

$$L[y](x) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

$$T(y) = \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix}$$

La alternativa de Rouché–Frobenius tomará en este caso la forma del siguiente resultado:

**TEOREMA 2.** *Sea el problema*

$$\begin{cases} L[y(x)] = f(x) \\ T(y) = h \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

*y el problema homogéneo asociado*

$$\begin{cases} L[y(x)] = 0 \\ T(y) = 0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

entonces se verifica una de las dos alternativa siguientes:

$ARF_1$  : (4.2) tiene solución única

$ARF_2$  : (4.3) tiene solución no trivial.

**DEMOSTRACION.** Toda solución de la ecuación  $L[y(x)] = f(x)$  se escribe (Kreider, Kuller, 1973) como

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + v(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

donde  $\{\phi_1, \phi_2\}$  es una base del espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2 / L[y] = 0\}$$

es fácil mostrar que  $T(y)$  es lineal, esto debido a que esta dado en términos de matrices, luego en las condiciones de contorno se tiene:

$$T(y) = c_1T(\phi_1) + c_2T(\phi_2) + T(v)$$

Como solamente tenemos que hallar  $c_1, c_2$  de  $T(y) = h \in \mathbb{R}^2$  y si  $\text{rang}(T(\phi_1), T(\phi_2)) = 2$  tenemos rango máximo y según la alternativa de Rouché–Frobenius parte (b), el número de incógnitas es igual al rango, en cuyo caso se tiene solución única para el problema (4.2).

Ahora si  $\text{rang}(T(\phi_1), T(\phi_2)) < 2$  entonces (4.3) tiene solución distinta de la trivial por la misma razón.

□

Nótese que como aplicación del teorema de Rouché–Frobenius, si

$$\text{rang}(T(\phi_1), T(\phi_2)) < 2$$

entonces el problema (4.2) tiene solución, y en ese caso no es única, así se verifica que

$$\text{rang}(T(\phi_1), T(\phi_2)) = \text{rang}((T(\phi_1), T(\phi_2), h - Y(v))).$$

Otro punto de vista interesante, es el siguiente: Consideremos

$$\mathcal{E} = \{\phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) / T(\phi) = 0\}$$

es decir, las funciones con dos derivadas continuas, las cuales satisfacen las condiciones de contorno del problema (4.3). Entonces el *operador diferencial*  $L$  puede verse como la aplicación

$$L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

lineal y uno a uno, pues se supone que el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial. Pero se puede mostrar que definiendo

$$\mathcal{G}: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{E}$$

por

$$\mathcal{G}(f(x)) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt$$

donde  $G(x, t)$  es la función de Green ( Kreider, Kuller, 1973) dada por

$$G(x, t) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + k(x, t)$$

y

$$k(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < t \\ \frac{\phi_1(t)\phi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(t)}{a_0(t)W(\phi_1, \phi_2)(t)} & \text{si } t \leq x \leq b \end{cases}$$

se tiene que  $L\mathcal{G}(f(x)) = f(x)$ , es la aplicación inversa de  $L$ . Además la unicidad de soluciones implica también que

$$\mathcal{G}L(T(x)) = T(x).$$

## 5. LA ALTERNATIVA EN UN OPERADOR INTEGRAL

Se llama ecuación integral de Fredholm de segunda especie, a una ecuación del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x) \quad (5.1)$$

donde  $\phi(x)$  es la función incógnita,  $K(x,t)$  y  $f(x)$  son funciones conocidas;  $x$  y  $t$  son variables reales, que varían en un intervalo  $[a,b]$ , y  $\lambda$  es un factor numérico.

La función  $K(x,t)$  se denomina *núcleo de la ecuación integral*, se supone que está definido en la región cuadrada

$$\Omega = \{(x,t)/a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$$

del plano  $(x,t)$  y es continua en  $\Omega$ , o bien sus discontinuidades son tales que la integral doble

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt < \infty.$$

Si  $f(x) \neq 0$ , la ecuación (5.1) se llama no homogénea; si en cambio  $f(x) = 0$  la ecuación (5.1) toma la forma

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = 0 \quad (5.2)$$

y se le denomina *ecuación integral homogénea*. Los límites de integración  $a$  y  $b$  en las integrales (5.1) y (5.2) pueden ser finitos o infinitos.

La ecuación

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x) \quad (5.3)$$

es conocida como *ecuación de Fredholm* de primera especie, donde el núcleo cumple la condición de integración siguiente

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt < \infty$$

el término independiente  $f(x)$  es una función dada de  $\mathcal{L}_2[a,b]$  y  $\phi$  es la función incógnita, la cual también está en  $\mathcal{L}_2[a,b]$ .

Pongamos en correspondencia a la ecuación (5.3) con el operador  $A : \mathcal{L}_2[a,b] \rightarrow \mathcal{L}_2[a,b]$ , definido del siguiente modo:

$$A\phi = \psi, \text{ donde } (A\phi)(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = \psi(x) \quad (5.4)$$

El estudio de la ecuación (5.3) se reduce, por supuesto, al estudio de las propiedades de este operador  $A$  llamado *operador de Fredholm* de núcleo  $K$ . Se sabe del análisis funcional (Lang 1969) que un operador entre espacios de Hilbert es *totalmente continuo* si transforma conjuntos débilmente compactos en conjuntos relativamente compactos según la topología fuerte, pero esto es completamente equivalente a demostrar que el operador

transforma toda sucesión débilmente convergente en una sucesión fuertemente convergente (entendiendo fuertemente como la topología definida por la norma del espacio). Según Sánchez (1989) se demuestra que el operador  $A$  de Fredholm es un operador lineal completamente continuo.

Para la solución de la ecuación (5.1) lo que importa no es la forma integral del operador (5.2) sino el hecho de que este operador es totalmente continuo y autoconjugado, es natural escribir la ecuación (5.1) en la forma

$$\phi = A\phi + f \quad (5.5)$$

De acuerdo con el teorema de Hilbert-Schmidt (Sánchez 1989) existe para el operador  $A$ , un sistema ortogonal  $\{\psi_n\}$  de funciones propias correspondientes a los valores propios  $\{\lambda_n\}$ , las cuales permiten escribir las soluciones en la forma

$$\phi = \sum_n \chi_n \psi_n + \phi'$$

donde  $\phi'$  es tal que  $A\phi' = 0$ . Teniéndose así el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 1.** *Si 1 no es un valor propio del operador  $A$ , la ecuación  $\phi = A\phi + f$  tiene una solución y sólo una, cualquiera que sea  $f$ ; en cambio, si 1 es valor propio del operador  $A$ , la ecuación  $\phi = A\phi + f$  tiene solución, si y sólo si el término independiente  $f$  es ortogonal a todas las funciones propias del operador  $A$  correspondientes al valor propio 1; si esta última condición se cumple, la ecuación  $\phi = A\phi + f$  tiene un conjunto infinito de soluciones.*

En esta forma Fredholm retoma los resultados de Rouché-Frobenius para obtener su alternativa como una generalización de la de Rouché-Frobenius. De acuerdo con el resultado anterior, la alternativa se reduce a la posibilidad de invertir el operador  $A - I$  y significa que  $\lambda = 1$  es, o bien un punto regular del operador  $A$ , o bien un valor propio de multiplicidad finita. Por supuesto todo lo que se afirma para el operador  $A$  sigue siendo válido también para el operador  $A - \lambda I$ , donde  $\lambda \neq 0$ . Luego *todo punto distinto de cero del espectro de un operador totalmente continuo, es un valor propio cuya multiplicidad es finita.* Además como se sabe el conjunto de estos valores propios es a lo más numerable. El punto 0 siempre pertenece al espectro de un operador totalmente continuo en un espacio de dimensión infinita; pero en general no es necesariamente un valor propio. Los operadores totalmente continuos, para los cuales 0 es el único punto del espectro, son llamados *operadores de Volterra*, u operadores abstractos (Volterra 1959).

El enunciado de la alternativa de Fredholm tal como fue dada originalmente se da a continuación:

*O bien la ecuación lineal no homogénea de segunda especie  $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x)$  tiene una única solución para cualquier función  $f(x)$ , o la ecuación homogénea correspondiente  $\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = 0$  tiene por lo menos una solución no trivial.*

Para las actuales aplicaciones de la alternativa, ésta se presenta en la siguiente forma:

**ALTERNATIVA DE FREDHOLM:** Sean  $\lambda$  un escalar distinto de cero,  $X$  un espacio lineal normado y  $A: X \rightarrow X$  una transformación completamente continua. Entonces se tiene una de las dos cosas siguientes: la ecuación homogénea

$$Ax - \lambda x = 0$$

tiene solamente solución trivial, en cuyo caso la ecuación no homogénea

$$Ax - \lambda x = y$$

tiene una única solución para  $y \in X$  arbitrario, ó el sistema homogéneo tiene un número finito  $v = \dim[\text{Núcleo}(A - \lambda I)]$  de soluciones linealmente independientes, en tal caso la ecuación adjunta homogénea

$$A'x - \lambda x = 0$$

tiene  $v$  soluciones linealmente independientes también; entonces la ecuación no homogénea tiene soluciones justamente cuando  $y \in [\text{Núcleo}(A' - \lambda I)]^\perp$ .

Una supergeneralización de esta alternativa se encuentra en el artículo *Alternativa de Fredholm para operadores monótonos* de D. Sánchez (1987) en donde se afirma que:

*Siendo  $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^*$  un operador continuo de un espacio de Banach reflexivo en su dual, si el recorrido  $R(T)$  de  $T$  tiene codimensión finita, entonces la ecuación  $Tu = f$  es soluble si y sólo si  $f \perp R(T)^\perp$ .*

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] G.Birkhoff y MacLane(1960): *Algebra Moderna*. Editorial Teide pp 206–237.
- [2] G.Birkhoff and Rota (1974): *Ordinary Differential equations*. John Wiley and Sons.
- [3] G.Bachman and L.Narici (1966): *Functional Analysis*. Academic Press.

- [4] M.Braun (1978): *Differential Equations and their Applications*. Springer Interamericano S.A
- [5] A.N. Kolmogórov, S.V.Fomín(1975): *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial Mir. Moscu.
- [6] Kreider, Kuller, Ostberg(1974): *Ecuaciones diferenciales*. Fondo Educativo Interamericano S.A.
- [7] S. Lang(1968): *Analysis II*. Addison–Wesley Publ.Comp.Inc. Chapter IX.
- [8] W.V. Lovitt (1950): *Linear Integral Equations*.Dover Publications.
- [9] R.Pastor, P.Callejas, C.A.Trejo (1959): *Análisis Matemático*. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Vol.III.
- [10] I.G.Petrovski (1957): *Lectures on the Theory of Integral Equations*. Graylock Press Rochester, New York.
- [11] J.D.Sánchez (1987): *Alternativa de Fredholm para operadores monótonos*. Boletín de Matemáticas Vol.XXI, No.1, pp.22–38.
- [12] J.D.Sánchez (1989): *Ecuaciones Integrales*. VI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Santafé de Bogotá.
- [13] J.D.Sánchez (1995): *Elementos de operadores autoadjuntos de segundo orden*. XII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Santafé de Bogotá.
- [14] F.Simmons (1979): *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw–Hill.
- [15] V.Volterra (1959): *Theory of functionals and integral and Integrodifferential equations*. Dover Publications. Inc.New York.

## ДАЖЙЛЛЭЮ

*Espero que el lector haya obtenido algún provecho de este trabajo en el aprendizaje de las Alternativas de Rouche-Frobenius.*

Quiero agradecer a mi hijo Juan Armando quien ha sido un animador permanente de este proyecto de aprendizaje en matemática y que sin él habría sido imposible realizarlo. También a mi esposa Nohora quien leyó los originales y cuidó del buen manejo del lenguaje español.

*Exitos y bienvenidos a la investigación por internet. Cualquier comentario favor hacerlo llegar a:*

[danojuanos@hotmail.com](mailto:danojuanos@hotmail.com),  
[danojuanos@tutopia.com](mailto:danojuanos@tutopia.com)  
[danojuanos@yahoo.com](mailto:danojuanos@yahoo.com)

Copyright© Darío Sánchez Hernández